ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 9, 10 и 11.

I.

Общая теорія относительнаго движенія.

5. Показавши такимъ образомъ синематическое и динамическое значеніе найденныхъ формулъ, обратимся снова къ уравненіямъ, выражающимъ условія дѣйствительнаго перемѣщенія системы матеріальныхъ точекъ. Вставляя выраженія (27) въ уравненія (3) и (4), находимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, a_1 \{\cos(A_1, x).\, dx + \cos(A_1, y).\, dy + \cos(A_1, z).\, dz\} + \Theta_1.\, dt = 0 \\ \Sigma\, a_2 \{\cos(A_2, x).\, dx + \cos(A_2, y).\, dy + \cos(A_2, z).\, dz\} + \Theta_2.\, dt = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots \quad (48)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, b_1 \{\cos(B_1, x).\, dx + \cos(B_1, y).\, dy + \cos(B_1, z).\, dz\} + \Omega_1.\, dt = 0 \\ \Sigma\, b_2 \{\cos(B_2, x).\, dx + \cos(B_2, y).\, dy + \cos(B_2, z).\, dz\} + \Omega_2.\, dt = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots \quad (49)$$

гдѣ:

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_1 = \Sigma a_1 \left\{\left(\frac{d\xi}{\partial t} + z\,\omega_y - y\,\omega_z\right).\cos(A_1, x) + \left(\frac{d\eta}{\partial t} + x\,\omega_z - z\,\omega_x\right).\cos(A_1, y) + \left(\frac{d\zeta}{\partial t} + y\,\omega_x - x\,\omega_y\right)\cos(A_1, z)\right\} + T_1 \\ \Theta_2 = \Sigma a_2 \left\{\left(\frac{d\xi}{\partial t} + z\,\omega_y - y\,\omega_z\right).\cos(A_2, x) + \left(\frac{d\eta}{\partial t} + x\,\omega_z - z\,\omega_x\right).\cos(A_2, y) + \left(\frac{d\zeta}{\partial t} + y\,\omega_x - x\,\omega_y\right)\cos(A_2, z)\right\} + T_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (50)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 = \Sigma b_1 \left\{\left(\frac{d\xi}{\partial t} + z\,\omega_y - y\,\omega_z\right).\cos(B_1, x) + \left(\frac{d\eta}{\partial t} + x\,\omega_z - z\,\omega_x\right).\cos(B_1, y) + \left(\frac{d\zeta}{\partial t} + y\,\omega_x - x\,\omega_y\right)\cos(B_1, z)\right\} + \mathrm{T}_1 \\ \Omega_2 = \Sigma b_2 \left\{\left(\frac{d\xi}{\partial t} + z\,\omega_y - y\,\omega_z\right).\cos(B_2, x) + \left(\frac{d\eta}{\partial t} + x\,\omega_z - z\,\omega_x\right).\cos(B_2, y) + \left(\frac{d\zeta}{\partial t} + y\,\omega_x - x\,\omega_y\right)\cos(B_2, z)\right\} + \mathrm{T}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (51)$$

если положимъ для краткости:

$$\left.\begin{array}{l} d\xi = a.\,\partial\xi_1 + b\;\partial\eta_1 + c.\,\partial\zeta_1 \\ d\eta = a'.\,\partial\xi_1 + b'.\,\partial\eta_1 + c'.\,\partial\zeta_1 \\ d\zeta = a''.\,\partial\xi_1 + b''.\,\partial\eta_1 + c''.\,\partial\zeta_1 \end{array}\right\} \dots \quad (52)$$

Если какое-нибудь изъ условій (48) или (49) дѣйствительныхъ перемѣщеній системы матеріальныхъ точекъ относительно подвижныхъ осей не будетъ измѣняться со временемъ, то соотвѣтствующее сему условію выраженіе изъ выраженій (50) и (51) обратится само собою въ нуль, если вмѣсто ξ, η, ζ, ω_x, ω_y, ω_z подставимъ ихъ величины въ функціяхъ времени t.

Если какое-либо изъ условій дѣйствительныхъ перемѣщеній (3) и (4) относительно неподвижныхъ осей не будетъ зависѣть отъ времени, слѣд. соотвѣтствующая ему изъ величинъ T_1, T_2 .... T_1, T_2 .... будетъ равняться нулю, если притомъ сіе условіе будетъ зависѣть только отъ разностей координатъ, слѣд. косинусы угловъ, составляемыхъ направленіями, соотвѣтствующими сему условію изъ направленій A_1, A'_1... A_2, A'_2.... B_1, B'_1.... B_2, B'_2...., съ осями координатъ, пропорціональны разностямъ координатъ, то, легко видѣть, въ семъ случаѣ соотвѣтствующая изъ величинъ Θ_1, Θ_2.... Ω_1, Ω_2... будетъ равняться нулю, и условіе дѣйствительныхъ перемѣщеній относительно подвижныхъ осей будетъ имѣть туже самую форму, какую оно имѣло относительно осей неподвижныхъ въ пространствѣ.

Полагая

$$X = a\ X_1 + b\ Y_1 + c\ Z_1$$
$$Y = a'\ X_1 + b'\ Y_1 + c'\ Z_1$$
$$Z = a''\ X_1 + b''\ Y_1 + c''\ Z_1,$$

имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a\,X + a'\ Y + a''\ Z \\ Y_1 &= b\,X + b'\ Y + b''\ Z \\ Z_1 &= c\,X + c'\ Y + c''\ Z \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (53)$$

Вставляя въ уравненіе (10) дѣйствительнаго перемѣщенія системы матеріальныхъ точекъ вмѣсто X_1, Y_1, Z_1 ихъ величины по уравненіямъ (53), вмѣсто $\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2}$ ихъ величины по уравненіямъ (24), вмѣсто $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ ихъ величины по уравненіямъ (17), и обращая вниманіе на уравненія (13) и (14), изъ уравненія (10) по сокращеніи находимъ:

$$\Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{\partial t^2}\right).\,\Delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{\partial t^2}\right).\,\Delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{\partial t^2}\right).\,\Delta z\right\}$$
$$+ \lambda_1\,\Sigma\,a_1\{\cos(A_1, x).\,\Delta x + \cos(A_1, y).\,\Delta y + \cos(A_1, z).\,\Delta z\} + \ldots$$
$$+ \mu_1\,\Sigma\,b_1\{\cos(B_1, x).\,\Delta x + \cos(B_1, y).\,\Delta y + \cos(B_1, z).\,\Delta z\} + \ldots = 0, \quad . \ . \ . \ . \quad (54)$$

уравненіе, существующее для всякаго совершенно произвольнаго перемѣщенія $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta x' \ldots$ системы матеріальныхъ точекъ. Въ предъидущемъ уравненіи $\frac{d^2x}{\partial t^2}, \frac{d^2y}{\partial t^2}, \frac{d^2z}{\partial t^2}$ должны быть замѣнены ихъ величинами по уравненіямъ (28); множители $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ должны необходимо опредѣлиться положительными.

Но такъ какъ произвольныя перемѣщенія $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta x'_1 \ldots$ по уравненіямъ (20) зависятъ отъ произвольныхъ перемѣщеній $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x' \ldots$, да еще отъ перемѣщеній $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta, \delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$ общихъ всѣмъ точкамъ системы, то вставляя въ уравненіе (54) вмѣсто $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta x' \ldots$ ихъ величины по уравненіямъ (20), находимъ уравненіе:

$$\Delta\xi.\ \Sigma\left\{X - m\frac{d^2x}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, x) + \ldots \mu_1 b_1.\cos(B_1, x) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, x) + \ldots\right\} +$$
$$\Delta\eta.\ \Sigma\left\{Y - m\frac{d^2y}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, y) + \ldots \mu_1 b_1.\cos(B_1, y) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, y) + \ldots\right\} +$$
$$\Delta\zeta.\ \Sigma\left\{Z - m\frac{d^2z}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, z) + \ldots \mu_1 b_1.\cos(B_1, z) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, z) + \ldots\right\} +$$
$$\delta\varphi_x.\ \Sigma\left\{y.\left[Z - m\frac{d^2z}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \ldots\right] - z.\left[Y - m\frac{d^2y}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \ldots\right]\right\} +$$
$$\delta\varphi_y.\ \Sigma\left\{z.\left[X - m\frac{d^2x}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \ldots\right] - x.\left[Z - m\frac{d^2z}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \ldots\right]\right\} +$$
$$\delta\varphi_z.\ \Sigma\left\{x.\left[Y - m\frac{d^2y}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \ldots\right] - y.\left[X - m\frac{d^2x}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \ldots\right]\right\} +$$
$$\Sigma\left\{\left[X - m\frac{d^2x}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, x) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, x) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, x) + \ldots\right]\delta x\ +\right.$$
$$\left[Y - m\frac{d^2y}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, y) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, y) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, y) + \ldots\right]\delta y\ +$$
$$\left.\left[Z - m\frac{d^2z}{\partial t^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, z) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, z) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, z) + \ldots\right]\delta z\right\} = 0, \quad (55)$$

существующее для всякаго совершенно произвольнаго перемѣщенія $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta, \delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z, \delta x, \delta y, \delta z, \delta x' \ldots$ системы матеріальныхъ точекъ.

По произвольности перемѣщеній $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x' \ldots$ и перемѣщеній $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta, \delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$ уравненіе (55) разлагается на слѣдующія уравненія, выражающія, какъ и уравненіе (55), условія дѣйствительнаго перемѣщенія системы матеріальныхъ точекъ:

$$\left.\begin{aligned}
&X - m.\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, x) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, x) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, x) + \ldots = 0\\
&Y - m.\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, y) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, y) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, y) + \ldots = 0\\
&Z - m.\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, z) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, z) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, z) + \ldots = 0\\
&X' - m.\frac{d^2x'}{dt^2} + \lambda_1 a'_1.\cos(A'_1, x) + \lambda_2 a'_2\cos(A'_2, x) + \ldots + \mu_1 b'_1.\cos(B'_1, x) + \mu_2 b'_2.\cos(B'_2, x) + \ldots = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}(56)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\left\{X - m.\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, x) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, x) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, x) + \ldots\right\} = 0\\
&\Sigma\left\{Y - m.\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, y) + \ldots + \mu_1 b_1\cos(B_1, y) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, y) + \ldots\right\} = 0\\
&\Sigma\left\{Z - m.\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \lambda_2 a_2.\cos(A_2, z) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, z) + \mu_2 b_2.\cos(B_2, z) + \ldots\right\} = 0
\end{aligned}\right\}(57)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\left\{y.\left[Z - m.\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \ldots\right] - z.\left[Y - m.\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \ldots\right]\right\} = 0\\
&\Sigma\left\{z.\left[X - m.\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \ldots\right] - x.\left[Z - m.\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \ldots\right]\right\} = 0\\
&\Sigma\left\{x.\left[Y - m.\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \ldots\right] - y.\left[X - m.\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \ldots\right]\right\} = 0
\end{aligned}\right\}(58)$$

гдѣ вмѣсто $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ должны быть вставлены ихъ величины по уравненіямъ (28). Послѣ этой вставки уравненія (56), (57), (58) принимаютъ соотвѣтственно слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2x}{\partial t^2} + 2\left(\omega_y.\frac{\partial z}{\partial t} - \omega_z.\frac{\partial y}{\partial t}\right) = X - \frac{a.\partial^2\xi_1 + b.\partial^2\eta_1 + c.\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} - z.\frac{\partial\omega_y}{\partial t} + y.\frac{\partial\omega_z}{\partial t} - \omega_y.(y\omega_x - x\omega_y) + \omega_z.(x\omega_z - z\omega_x)\\
&\qquad\qquad + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \ldots\\
&\frac{\partial^2y}{\partial t^2} + 2\left(\omega_z.\frac{\partial x}{\partial t} - \omega_x.\frac{\partial z}{\partial t}\right) = Y - \frac{a'.\partial^2\xi_1 + b'.\partial^2\eta_1 + c'.\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} - x.\frac{\partial\omega_z}{\partial t} + z.\frac{\partial\omega_x}{\partial t} - \omega_z.(z\omega_y - y\omega_z) + \omega_x.(y\omega_x - x\omega_y)\\
&\qquad\qquad + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \ldots\\
&\frac{\partial^2z}{\partial t^2} + 2\left(\omega_x.\frac{\partial y}{\partial t} - \omega_y.\frac{\partial x}{\partial t}\right) = Z - \frac{a''.\partial^2\xi_1 + b''.\partial^2\eta_1 + c''.\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} - y.\frac{\partial\omega_x}{\partial t} + x.\frac{\partial\omega_y}{\partial t} - \omega_x.(x\omega_z - z\omega_x) + \omega_y.(z\omega_y - y\omega_z)\\
&\qquad\qquad + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \ldots\\
&\frac{\partial^2x'}{\partial t^2} + 2\left(\omega_y.\frac{\partial z'}{\partial t} - \omega_z.\frac{\partial y'}{\partial t}\right) = X' - \frac{a.\partial^2\xi_1 + b.\partial^2\eta_1 + c.\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} - z'.\frac{\partial\omega_y}{\partial t} + y'.\frac{\partial\omega_z}{\partial t} - \omega_y.(y'\omega_x - x'\omega_y) + \omega_z.(x'\omega_z - z'\omega_x)\\
&\qquad\qquad + \lambda_1 a'_1.\cos(A'_1, x) + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}(59)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma m\frac{\partial^2x}{\partial t^2} + 2\omega_y.\Sigma m\frac{\partial z}{\partial t} - 2\omega_z.\Sigma m\frac{\partial y}{\partial t} = \Sigma X - \frac{a.\partial^2\xi_1 + b.\partial^2\eta_1 + c.\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma m - \frac{\partial\omega_y}{\partial t}\Sigma mz + \frac{\partial\omega_z}{\partial t}\Sigma my\\
&\quad + (\omega^2_y + \omega^2_z)\Sigma mx - \omega_y\omega_x.\Sigma my - \omega_z\omega_x.\Sigma mz + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, x) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, x) + \ldots\\
&\Sigma m\frac{\partial^2y}{\partial t^2} + 2\omega_z.\Sigma m\frac{\partial x}{\partial t} - 2\omega_x.\Sigma m\frac{\partial z}{\partial t} = \Sigma Y - \frac{a'.\partial^2\xi_1 + b'.\partial^2\eta_1 + c'.\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma m - \frac{\partial\omega_z}{\partial t}\Sigma mx + \frac{\partial\omega_x}{\partial t}\Sigma mz\\
&\quad + (\omega^2_z + \omega^2_x)\Sigma my - \omega_z\omega_y.\Sigma mz - \omega_x\omega_y\Sigma mx + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, y) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, y) + \ldots\\
&\Sigma m\frac{\partial^2z}{\partial t^2} + 2\omega_x.\Sigma m\frac{\partial y}{\partial t} - 2\omega_y.\Sigma m\frac{\partial x}{\partial t} = \Sigma Z - \frac{a''.\partial^2\xi_1 + b''.\partial^2\eta_1 + c''.\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma m - \frac{\partial\omega_x}{\partial t}\Sigma my + \frac{\partial\omega_y}{\partial t}\Sigma mx\\
&\quad + (\omega^2_x + \omega^2_y)\Sigma mz - \omega_x\omega_z.\Sigma mx - \omega_y\omega_z.\Sigma my + \lambda_1 a_1.\cos(A_1, z) + \ldots + \mu_1 b_1.\cos(B_1, z) + \ldots
\end{aligned}\right\}(60)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\Sigma m\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\,\Sigma m\left(y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}\right)=\Sigma\,(yZ-zY)+y\,\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,z)+\ldots\} \\
&\quad -z\,\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,y)+\ldots\}-\omega_x.\frac{\partial}{\partial t}\,\Sigma m\,(y^2+z^2)+2\omega_{\cdot}\,\Sigma mz\frac{\partial x}{\partial t}+2\omega_y\,\Sigma my\frac{\partial x}{\partial t} \\
&\quad -\frac{a''\,\partial^2\xi_1+b''\,\partial^2\eta_1+c''\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\,\Sigma my+\frac{a'\,\partial^2\xi_1+b'.\,\partial^2\eta_1+c'\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\,\Sigma mz-\frac{\partial\omega_x}{\partial t}\,\Sigma m\,(y^2+z^2) \\
&\quad -\omega_y\,\omega_z.\,\Sigma m\,(y^2-z^2)+\frac{\partial\omega_y}{\partial t}\,\Sigma mx+\frac{\partial\omega_z}{\partial t}\,\Sigma mxz+\omega_y\omega_x\Sigma mzx-\omega_z\omega_x\Sigma myx+\omega^2_y\Sigma myz-\omega^2_z\Sigma myz. \\
\Sigma m\left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\,\Sigma m\left(z\frac{\partial x'}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\Sigma\,(zX-xZ)+z\,\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,x)+\ldots\} \\
&\quad -x\,\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,z)+\ldots\}+\ldots \\
\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\,\Sigma m\left(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}\right)=\Sigma\,(xY-yX)+x\,\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,y)+\ldots\} \\
&\quad -y\,\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,x)+\ldots\}+\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(61)
$$

Уравненія (56), или, что все равно, уравненія (59) выражаютъ, что потерянныя силы не стремятся произвести перемѣщенія системы матер. точекъ въ отношеніи движущихся осей координатъ; уравненія (57) и (58) или, что все равно, уравненія (60) и (61) выражаютъ, что потерянныя силы не стремятся произвести перемѣщенія системы, общаго съ перемѣщеніемъ подвижныхъ осей координатъ. Но такъ какъ форма уравненій (57) и (58) показываетъ, что они суть необходимое слѣдствіе уравненій (56), то заключаемъ, что условіе дѣйствительнаго перемѣщенія будетъ выражено уже уравненіями (56) и что нельзя опредѣлить совокупно и движенія системы, общаго съ перемѣщеніемъ подвижныхъ осей, и движенія системы относительно сихъ послѣднихъ. Необходимо, чтобы дано было движеніе осей координатъ для того, чтобы можно было опредѣлить движеніе системы матер. точекъ относительно сихъ осей. Въ семъ случаѣ мы будемъ имѣть уравненія (56) или, что все равно, уравненія (59), которыхъ число равно числу искомыхъ координатъ матеріальныхъ точекъ и ур. (48) и (49), которыхъ число будетъ равно числу искомыхъ множителей $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \mu_1, \mu_2 \ldots$, отъ величины которыхъ зависятъ силы сопротивленія, оказываемаго препятствіями; слѣд. будемъ имѣть столько уравненій, сколько искомыхъ величинъ.

Уравненія же (60) и (61), выражающія, что потерянныя силы не стремятся произвести перемѣщенія системы, общаго съ перемѣщеніемъ подвижныхъ осей координатъ, опредѣляютъ вполнѣ движеніе сихъ осей по данному движенію системы матеріальныхъ точекъ относительно сихъ осей при данныхъ силахъ, дѣйствующихъ на матеріальныя точки, и при данныхъ силахъ сопротивленія, ибо тогда имѣемъ шесть уравненій (60) и (61) и шесть искомыхъ перемѣнныхъ, опредѣляющихъ положеніе подвижныхъ осей координатъ относительно осей неподвижныхъ.

6. Когда требуется опредѣлить движеніе системы мат. точекъ относительно осей координатъ, которыхъ движеніе дано, положимъ, что исключивъ изъ уравненій (59) множители $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \mu_1, \mu_2 \ldots$, мы проинтегрировали полученныя уравненія и опредѣлили координаты $x, y, z, x' \ldots$ въ функціяхъ времени t; но для того, чтобы опредѣленныя величины координатъ были именно величины тѣхъ координатъ, которыя дѣйствительно опредѣляютъ положеніе системы, необходимо надобно, чтобы $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ были положительны; въ противномъ случаѣ наше рѣшеніе ложно. Посему предстоитъ каждый разъ необходимость опредѣлять множители $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$.

Помножимъ уравненія (59) соотвѣтственно на

$$
\begin{array}{l}
a_1.\cos(A_1,x)\ ,\ a_1.\cos(A_1,y)\ ,\ a_1.\cos(A_1,z)\ ,\ a'_1.\cos(A'_1,x)\ ,\ \ldots \\
a_2.\cos(A_2,x)\ ,\ a_2.\cos(A_2,y)\ ,\ a_2.\cos(A_2,z)\ ,\ a'_2.\cos(A'_2,x)\ ,\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_1.\cos(B_1,x)\ ,\ b_1.\cos(B_1,y)\ ,\ b_1.\cos(B_1,z)\ ,\ b'_1.\cos(B'_1,x)\ ,\ \ldots \\
b_2.\cos(B_2,x)\ ,\ b_2.\cos(B_2,y)\ ,\ b_2.\cos(B_2,z)\ ,\ b'_2.\cos(B'_2,x)\ ,\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

и каждый разъ складывая ихъ, получаемъ уравненія:

$$
\left.\begin{array}{l}
(a_1,a_1)\,\lambda_1+(a_1,a_2)\,\lambda_2+\ldots+(a_1,b_1)\,\mu_1+(a_1,b_2)\,\mu_2+\ldots=E_1 \\
(a_2,a_1)\,\lambda_1+(a_2,a_2)\,\lambda_2+\ldots+(a_2,b_1)\,\mu_1+(a_2,b_2)\,\mu_2+\ldots=E_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(b_1,a_1)\,\lambda_1+(b_1,a_2)\,\lambda_2+\ldots+(b_1,b_1)\,\mu_1+(b_1,b_2)\,\mu_2+\ldots=F_1 \\
(b_2,a_1)\,\lambda_1+(b_2,a_2)\,\lambda_2+\ldots+(b_1,b_1)\,\mu_1+(b_2,b_2)\,\mu_2+\ldots=F_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\quad(62)
$$

гдѣ вообще:

$$(a_m, a_n) = a_m a_n . \cos(A_m, A_n) + a'_m a'_n . \cos(A'_m, A'_n) + \ldots\ldots$$
$$(a_m, b_n) = a_m b_n . \cos(A_m, B_n) + a'_m b'_n . \cos(A'_m, B'_n) + \ldots\ldots$$
$$(b_m, b_n) = b_m b_n . \cos(B_m, B_n) + b'_m b'_n . \cos(B'_m, B'_n) + \ldots\ldots$$

$$E_n = a_n . \cos(A_n, x) . \Big\{ X - m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2m\left(\omega_y \frac{\partial z}{\partial t} - \omega_z \frac{\partial y}{\partial t}\right) - m . \frac{a . \partial^2\xi_1 + b . \partial^2\eta_1 + c . \partial^2\zeta_1}{\partial t^2} - mz\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + my\frac{\partial \omega_z}{\partial t}$$
$$- m\omega_y(y\omega_x - x\omega_y) + m\omega_z(x\omega_z - z\omega_x) \Big\}$$
$$+ a_n \cos(A_n, y)\left\{ Y - m . \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$
$$+ a_n \cos(A_n, z)\left\{ Z - m . \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$
$$+ a'_n \cos(A'_n, x)\left\{ X - m . \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\} + \ldots$$

$$F_n = b_n . \cos(B_n, x) . \Big\{ X - m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2m\left(\omega_y \frac{\partial z}{\partial t} - \omega_z \frac{\partial y}{\partial t}\right) - m . \frac{a . \partial^2\xi_1 + b . \partial^2\eta_1 + c . \partial^2\zeta_1}{\partial t^2} - mz\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + my\frac{\partial \omega_z}{\partial t}$$
$$- m\omega_y(y\omega_x - x\omega_y) + m\omega_z(x\omega_z - z\omega_x) \Big\}$$
$$+ b_n \cos(B_n, y) . \left\{ Y - m . \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$
$$+ b_n \cos(B_n, z) . \left\{ Z - m . \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$
$$+ b_n \cos(B'_n, x) . \left\{ X' - m . \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\} + \ldots$$

По уравненіямъ (62) легко уже составить общую формулу для искомыхъ неизвѣстныхъ

$$\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \mu_1, \mu_2 \ldots\ldots,$$

которыя опредѣлятся какъ функціи времени t. Положимъ для краткости

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = f_1(t), \; \lambda_2 = f_2(t), \ldots\ldots \\ \mu_1 = \mathfrak{f}_1(t), \; \mu_2 = \mathfrak{f}_2(t), \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (63)$$

Пусть интегралы уравненій (48), соотвѣтствующихъ множителямъ $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ будутъ соотвѣтственно.

$$\varphi_1(x, y, z, x', \ldots t) = 0, \; \varphi_2(x, y, z, x', \ldots t) = 0 \ldots (64)$$

Полагая $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = 0$, ...

опредѣляемъ изъ сихъ уравненій величины t, удовлетворяющія каждому изъ сихъ уравненій порознь, и разсмотримъ младшую изъ сихъ величинъ, которую означимъ чрезъ t' и которая пусть удовлетворяетъ уравненію: $f_n(t) = 0$.

Такъ какъ $f_n(t)$ отъ $t = t'$ обращается въ нуль, то это показываетъ, что въ концѣ времени t' давленіе на препятствіе, соотвѣтствующее уравненію (64):

$$\varphi_n(x, y, z, x', \ldots\ldots t) = 0,$$

сдѣлалось равнымъ нулю. Если $f_n(t)$ при переходѣ чрезъ 0 не мѣняетъ своего знака, т. е. послѣ времени $t = t'$ получаетъ снова положительную величину, то это покажетъ, что послѣ времени t' разсматриваемое препятствіе будетъ ограничивать перемѣщенія матер. точекъ системы, и при дальнѣйшемъ движеніи мы должны будемъ принимать его въ разсчетъ. Если-же при переходѣ чрезъ нуль $f_n(t)$ мѣняетъ свой знакъ съ + на —, то это покажетъ намъ, что опредѣленныя координаты матер. точекъ справедливы только отъ начала движенія до $t = t'$; при дальнѣйшемъ движеніи система оставитъ препятствіе, выражаемое уравненіемъ:

$$\varphi_n(x, y, z, x', \ldots\ldots t) = 0,$$

и при дальнѣйшемъ опредѣленіи системы, мы должны будемъ опустить въ уравненіяхъ (48) соотвѣтствующее уравненіе и въ уравненіяхъ (59), равно какъ и въ уравненіяхъ (60) и (61) — соотвѣтствующіе члены, и опредѣлять координаты x, y, z, x'. . . . . . . системы матеріальныхъ точекъ, принимая за начальныя величины координатъ тѣ величины сихъ послѣднихъ, которыя соотвѣтствовали концу времени t. Легко видѣть, какъ должно было-бы поступать при дальнѣйшемъ движеніи системы матеріальныхъ точекъ.

7. Такъ какъ въ уравненіяхъ (56), или, что все равно, (59) $\mu_1, \mu_2 \ldots$ совершенно произвольны какъ по величинѣ такъ и по знаку, то собственно условія равновѣсія потерянныхъ силъ выразятся уравненіями, которыя мы получимъ, исключивъ $\mu_1, \mu_2 \ldots$ изъ уравненій (56). Уравненія, которыя бы получились такимъ образомъ по исключеніи, могутъ быть найдены иначе. Такъ какъ уравненія (57) и (58) суть

ничто иное какъ слѣдствія уравненій (56), то ур. (55) показываетъ, что условіе дѣйствительнаго перемѣщенія выразится уравненіемъ:

$$\Sigma \left\{ \left[X - m\frac{d^2x}{\partial t^2}\right]\delta x + \left[Y - m\frac{d^2y}{\partial t^2}\right].\,\delta y + \left[Z - m\frac{d^2z}{\partial t^2}\right]\delta z \right\}$$

$$+\lambda_1\,\Sigma a_1\{\cos(A_1,x)\,\delta x + \cos(A_1,y)\,\delta y + \cos(A_1,z)\,\delta z\} + \lambda_2\,\Sigma a_2\{\cos(A_2,x)\,\delta x + \cos(A_2,y)\,\delta y + \cos(A_2,z)\,\delta z\} + \ldots$$

$$+\mu_1\,\Sigma b_1\,\{\cos(B_1,x)\,\delta x + \cos(B_1,y)\,\delta y + \cos(B_1,z)\,\delta z\} + \mu_2\,\Sigma b_2\,\{\cos(B_2,x)\,\delta x + \cos(B_2,y)\,\delta y + \cos(B_2,z)\,\delta z\} + . = 0,$$

существующимъ для всякаго совершенно произвольнаго перемѣщенія $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \ldots$

Такъ какъ предъидущее уравненіе существуетъ для всякаго совершенно произвольнаго перемѣщенія, то

$$\begin{aligned}\Sigma \Big\{ \left[X - m\frac{d^2x}{\partial t^2}\right]\delta x + \left[Y - m\frac{d^2y}{\partial t^2}\right]\delta y + \left[Z - m\frac{d^2z}{\partial t^2}\right]\delta z \Big\}&\\ + \lambda_1\,\Sigma\, a_1\{\cos(A_1,x).\,\delta x + \cos(A_1,y).\,\delta y + \cos(A_1,z).\,\delta z\}&\\ + \lambda_2\,\Sigma\, a_2\{\cos(A_2,x).\,\delta x + \cos(A_2,y).\,\delta y + \cos(A_2,z).\,\delta z\}&\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \;\ldots\ldots (65)\end{aligned}$$

для всѣхъ перемѣщеній $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x' \ldots$, удовлетворяющихъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma b_1.\,\{\cos(B_1,x).\,\delta x + \cos(B_1,y).\,\delta y + \cos(B_1,z).\,\delta z\} &= 0\\ \Sigma b_2.\,\{\cos(B_2,x).\,\delta x + \cos(B_2,y).\,\delta y + \cos(B_2,z).\,\delta z\} &= 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (66)$$

Опредѣляя изъ уравненій (66) перемѣщенія $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \ldots$ по перемѣщеніямъ, которыя остаются совершенно произвольными и которыхъ число равно утроенному числу матеріальныхъ точекъ системы безъ числа уравненій (66), и вставляя въ уравненіе (65) опредѣленныя величины перемѣщеній, найдемъ, что сіе уравненіе разложится на столько уравненій, сколько въ него взойдетъ произвольныхъ перемѣщеній, и легко понять, что сіи уравненія будутъ тожественны съ уравненіями, которыя-бы мы получили, исключивъ $\mu_1, \mu_2 \ldots$ изъ уравненій (56), или (59).

8. Обратимся теперь къ уравненіямъ (60) и (61), выражающимъ, что потерянныя силы не стремятся произвести общаго поступательнаго и общаго вращательнаго движенія системы.

Полагая въ уравненіяхъ (60)

$$\Sigma mx = \bar{x}\,\Sigma m,\ \Sigma my = \bar{y}\,\Sigma m,\ \Sigma mz = \bar{z}\,\Sigma m$$

$$\Sigma m\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \bar{x}}{dt}\,\Sigma m,$$

$$\Sigma m\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \bar{y}}{dt}\,\Sigma m,$$

$$\Sigma m\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \bar{z}}{dt}\,\Sigma m,$$

$$\Sigma m\frac{\partial^2 x}{dt^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}}{dt^2}\,\Sigma m,$$

$$\Sigma m\frac{\partial^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 \bar{y}}{dt^2}\,\Sigma m,$$

$$\Sigma m\frac{\partial^2 z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{dt^2}\,\Sigma m,$$

видимъ, что движеніе центра массъ, опредѣляемаго относительно движущихъся осей координатами $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, будетъ относительно сихъ осей таково, какъ движеніе матеріальной точки, въ которой сосредоточены всѣ массы системы и къ которой приложены всѣ силы, дѣйствующія на сіи массы, и силы сопротивленія.

Полагая въ ур. (61)

$$\Sigma mx = 0,\ \Sigma my = 0,\ \Sigma mz = 0,$$

т. е. что начало подвижныхъ осей координатъ при своемъ движеніи совпадаетъ съ центромъ массъ, находимъ, что уравненія (61) имѣютъ ту-же самую форму, какую-бы имѣли, если-бы начало координатъ подвижныхъ осей было неподвижно.

Чтобы избѣжать сложныхъ формулъ, вообразимъ себѣ чрезъ начало подвижныхъ осей новыя оси, которыя при перемѣщеніи остаются параллельными неподвижнымъ осямъ. Уравненія общаго вращательнаго движенія системы мат. точекъ относительно сихъ осей легко получить изъ уравненій (61) положивши въ нихъ

$$a = 1,\ a' = 0,\ a'' = 0$$

$$b = 0,\ b' = 1,\ b'' = 0$$

$$c = 0,\ c' = 0,\ c'' = 1.$$

$$\omega_x = 0,\ \omega_y = 0,\ \omega_z = 0$$

$$\partial\omega_x = 0,\ \partial\omega_y = 0,\ \partial\omega_z = 0$$

Означивши чрезъ x_2, y_2, z_2 координаты матеріальной точки m относительно сихъ осей, изъ ур. (61) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\,\Sigma\, m\left(y_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dy_2}{dt}\right)=\Sigma\,(y_2 Z_2-z_2 Y_2)+y_2\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,z_2)+\ldots\}-z_2\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,y_2)+\ldots\}\\
&\qquad\qquad-\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, my_2+\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, mz_2\\
&\frac{\partial}{\partial t}\,\Sigma\, m\left(z_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dz_2}{dt}\right)=\Sigma\,(z_2 X_2-x_2 Z_2)+z_2\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,x_2)+\ldots\}-x_2\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,z_2)+\ldots\}\\
&\qquad\qquad-\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, mz_2+\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, mx_2\\
&\frac{\partial}{\partial t}\,\Sigma\, m\left(x_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dx_2}{dt}\right)=\Sigma\,(x_2 Y_2-y_2 X_2)+x_2\{\lambda_1 a_1\cos(A_1,y_2)+\ldots\}-y_2\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,x_2)+\ldots\}\\
&\qquad\qquad-\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, mx_2+\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, my_2
\end{aligned}\right\}\quad(67)$$

Для того, чтобы вращательное движенiе около начала подвижныхъ осей происходило такъ, какъ около неподвижной точки, въ предъидущихъ уравненiяхъ должны быть:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, my_2-\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, mz_2=0\\
&\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, mz_2-\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, mx_2=0\\
&\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, mx_2-\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}\,\Sigma\, my_2=0
\end{aligned}\right\}\;.\;\;.\;\;.\;\;(68)$$

Полагая

$$\Sigma\, mx_2=\Sigma\, m(x_1-\xi_1)=(\bar{x}_1-\xi_1)\,\Sigma\, m$$
$$\Sigma\, my_2=\Sigma\, m(y_1-\eta_1)=(\bar{y}_1-\eta_1)\,\Sigma\, m$$
$$\Sigma\, mz_2=\Sigma\, m(z_1-\zeta_1)=(\bar{z}_1-\zeta_1)\,\Sigma\, m,$$

гдѣ $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ суть координаты центра массъ системы матерiальныхъ точекъ, изъ предъидущихъ уравненiй получаемъ:

$$\frac{\partial^2\xi_1}{x-\xi_1}=\frac{\partial^2\eta_1}{y-\eta_1}=\frac{\partial^2\zeta_1}{z-\zeta_1}$$

Отсюда видимъ, что для того, чтобы вращательное движенiе около начала подвижныхъ осей происходило такъ, какъ около неподвижной точки, надобно чтобы начало координатъ двигалось такимъ образомъ, какъ будто его притягивала центральная сила, которой центръ находится въ центрѣ *тяжести*. Уравненiя (68) будутъ удовлетворены еще и тогда, когда:

$$\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}=0\;,\quad\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}=0\;,\quad\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}=0\;,$$

т. е. когда начало координатъ движется равномѣрно по прямой линiи.

Переходя отъ осей координатъ x_2, y_2, z_2 къ координатамъ x, y, z, распространимъ предъидущую теорему и на оси, имѣющiя вращательное движенiе около подвижнаго начала координатъ.

Предполагая въ уравненiяхъ (67) удовлетворенными уравненiя (68) и притомъ:

$$y_2.\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,z_2)+\ldots.\}-z_2.\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,y_2)+\ldots\}=0$$
$$z_2.\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,x_2)+\ldots.\}-x_2.\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,z_2)+\ldots\}=0$$
$$x_2.\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,y_2)+\ldots.\}-y_2.\{\lambda_1 a_1.\cos(A_1,x_2)+\ldots\}=0\;,$$

что случится, напр., тогда, когда условiя системы зависятъ только отъ разстоянiй мат. точекъ между собою, и предполагая

$$\Sigma\,(y_2 Z_2-z_2 Y_2)=0\;,$$
$$\Sigma\,(z_2 X_2-x_2 Z_2)=0\;,$$
$$\Sigma\,(x_2 Y_2-y_2 X_2)=0\;,$$

изъ уравненiй (67) получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\, m\left(y_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dy_2}{dt}\right)=c_1\\
&\Sigma\, m\left(z_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dz_2}{dt}\right)=c_2\\
&\Sigma\, m\left(x_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dx_2}{dt}\right)=c_3
\end{aligned}\right\}\;.\;\;.\;\;.\;\;(69)$$

гдѣ c_1, c_2, c_3 суть постоянныя величины, введенныя интеграцiею.

Вообразимъ себѣ, что чрезъ подвижное начало осей координатъ x_2, y_2, z_2, удовлетворяющее уравненiямъ (68), проходятъ, кромѣ подвижныхъ осей координатъ x, y, z, еще новыя подвижныя оси координатъ x_1, y_1, z_1, и пусть:

$$\left.\begin{aligned}
x_2&=a\,x+a'\,y+a''\,z=a_1\,x_1+a'_1\,y_1+a''_1\,z_1\\
y_2&=b\,x+b'\,y+b''\,z=b_1\,x_1+b'_1\,y_1+b''_1\,z_1\\
z_2&=c\,x+c'\,y+c''\,z=c_1\,x_1+c'_1\,y_1+c''_1\,z_1
\end{aligned}\right\}\;(70)$$

гдѣ къ косинусамъ угловъ a, a', a'', $b, b' b''$, c, c', c'' относятся уравненiя (12), (13) и (14), а къ косинусамъ угловъ a_1, a'_1, a''_1, b_1, b'_1, b''_1, c_1, c'_1, c''_1 — уравненiя, подобныя упомянутымъ.

Изъ уравненiй (70) получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}
dx_2&=a\,dx+a'\,dy+a''\,dz=a_1\,dx_1+a'_1\,dy_1+a''\,dz_1\\
dy_2&=b\,dx+b'\,dy+b''\,dz=b_1\,dx_1+b'_1\,dy_1+b''\,dz_1\\
dz_2&=c\,dx+c'\,dy+c''\,dz=c_1\,dx_1+c'_1\,dy_1+c''\,dz_1
\end{aligned}\right\}\;(71)$$

Изъ совокупности уравненій (70) и (71) легко получить:

$$y_2\partial z_2 - z_2\partial y_2 = (b'c'' - b''c')(ydz - zdy) + (b''c - bc'')(zdx - xdz) + (bc' - b'c)(ydx - xdy) = (b'_1c''_1 - b''_1c'_1)(y_1dz_1 - z_1dy_1) + \ldots$$
$$z_2\partial x_2 - x_2\partial z_2 = (c'a'' - c''a')(ydz - zdy) + (c''a - ca'')(zdx - xdz) + (ca' - c'a)(ydx - xdy) = (c'_1a''_1 - c''_1a'_1)(y_1dz_1 - z_1dy_1) + \ldots$$
$$x_2\partial y_2 - y_2\partial x_2 = (a'b'' - a''b')(ydz - zdy) + (a''b - ab'')(zdx - xdz) + (ab' - a'b)(ydx - xdy) = (a'_1b''_1 - a''_1b'_1)(y_1dz_1 - z_1dy_1) + \ldots$$

или въ слѣдствіе уравненій (14):

$$y_2\partial z_2 - z_2\partial y_2 = a(ydz - zdy) + a'(zdx - xdz) + a''(ydx - xdy) = a_1(y_1dz_1 - z_1dy_1) + a'_1(z_1dx_1 - x_1dz) + a''_1(y_1dx_1 - x_1dy_1)$$
$$z_2\partial x_2 - x_2\partial z_2 = b(ydz - zdy) + b'(zdx - xdz) + b''(ydx - xdy) = b_1(y_1dz_1 - z_1dy_1) + b'_1(z_1dx_1 - x_1dz) + b''_1(y_1dx_1 - x_1dy_1)$$
$$x_2\partial y_2 - y_2\partial x_2 = c(ydz - zdy) + c'(zdx - xdz) + c''(ydx - xdy) = c_1(y_1dz_1 - z_1dy_1) + c'_1(z_1dx_1 - x_1dz) + c''_1(y_1dx_1 - x_1dy_1)$$

Суммируя сіи уравненія относительно всѣхъ точекъ системы, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\partial t.\,c_1 &= a\,\Sigma m(ydz - zdy) + a'\,\Sigma m(zdx - xdz) + a''\,\Sigma m(ydx - xdy)\\
&= a_1\,\Sigma m(y_1dz_1 - z_1dy_1) + a'_1\,\Sigma m(z_1dx_1 - x_1dz_1) + a''_1\,\Sigma m(y_1dx_1 - x_1dy_1)\\
\partial t.\,c_2 &= b\,\Sigma m(ydz - zdy) + b'\,\Sigma m(zdx - xdz) + b''\,\Sigma m(ydx - xdy)\\
&= b_1\,\Sigma m(y_1dz_1 - z_1dy_1) + b'_1\,\Sigma m(z_1dx_1 - x_1dz_1) + b''_1\,\Sigma m(y_1dx_1 - x_1dy_1)\\
\partial t.\,c_3 &= c\,\Sigma m(ydz - zdy) + c'\,\Sigma m(zdx - xdz) + c''\,\Sigma m(ydx - xdy)\\
&= c_1\,\Sigma m(y_1dz_1 - z_1dy_1) + c'_1\,\Sigma m(z_1dx_1 - x_1dz_1) + c''_1\,\Sigma m(y_1dx_1 - x_1dy_1)
\end{aligned}\right\} \ldots \quad (72)$$

если только обратимъ вниманіе на уравненія (69).

Возводя сіи уравненія въ квадратъ и складывая ихъ, находимъ:

$$\begin{aligned}
(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\,\partial t^2 &= \{\Sigma m(ydz - zdy)\}^2 + \{\Sigma m(zdx - xdz)\}^2 + \{\Sigma m(ydx - xdy)\}^2\\
&= \{\Sigma m(y_1dz_1 - z_1dy_1)\}^2 + \{\Sigma m(z_1dx_1 - x_1dz_1)\}^2 + \{\Sigma m(y_1dx_1 - x_1dy_1)\}^2
\end{aligned}$$

Положимъ далѣе, что оси координатъ x_1, y_1, z_1 такъ перемѣщаются въ пространствѣ, что всегда:

$\Sigma m(z_1\,dx_1 - x_1\,dz_1) = 0$, $\Sigma m(y_1\,dz_1 - z_1\,dy_1) = 0$; тогда $\Sigma m(y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1)$

будетъ имѣть наибольшую и притомъ постоянную величину; именно:

$$\Sigma m(y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1) = +\,\partial t.\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\,,$$

гдѣ мы избрали знакъ $+$, предполагая ось z_1 такъ избранною, что $\Sigma m(y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1)$ положительно.

Въ сихъ предположеніяхъ урав. (72) примутъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\partial t.\,c_1 &= a\,\Sigma m(ydz - zdy) + a'\,\Sigma m(zdx - xdz) + a''\,\Sigma m(ydx - xdy) = a''_1\,\Sigma m(y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1) = a''_1\,\partial t\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\\
\partial t.\,c_2 &= b\,\Sigma m(ydz - zdy) + b'\,\Sigma m(zdx - xdz) + b''\,\Sigma m(ydx - xdy) = b''_1\,\Sigma m(y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1) = b''_1\,\partial t\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\\
\partial t.\,c_3 &= c\,\Sigma m(ydz - zdy) + c'\,\Sigma m(zdx - xdz) + c''\,\Sigma m(ydx - xdy) = c''_1\,\Sigma m(y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1) = c''_1\,\partial t\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}
\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Помножая сіи уравненія на a, b, c, на a', b', c', на a'', b'', c'', и каждый разъ складывая ихъ, получаемъ:

$$a''_1\,a + b''_1\,b + c''_1\,c = \cos(z_1, x) = \frac{\Sigma m(ydz - zdy)}{\partial t.\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}\,,$$

$$a''_1\,a' + b''_1\,b' + c''_1\,c' = \cos(z_1, y) = \frac{\Sigma m(zdx - xdz)}{\partial t.\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

$$a''_1\,a'' + b''_1\,b'' + c''_1\,c'' = \cos(z_1, z) = \frac{\Sigma m(ydx - xdy)}{\partial t.\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

Вставляя сюда вмѣсту dx, dy, dz ихъ величины по уравненіямъ (26), въ которыхъ только должно положить $\partial\xi_1$, $\partial\eta_1$, $\partial\zeta_1$ равными нулю, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(z_1, x) &= \frac{\omega_x \Sigma m(y^2+z^2) - \omega_y \Sigma m yx - \omega_z \Sigma m zx + \Sigma m\left(y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\
\cos(z_1, y) &= \frac{\omega_y \Sigma m(z^2+x^2) - \omega_z \Sigma m yz - \omega_x \Sigma m xy + \Sigma m\left(z\frac{\partial x}{\partial t} - z\frac{\partial z}{\partial t}\right)}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}\\
\cos(z_1, z) &= \frac{\omega_z \Sigma m(x^2+y^2) - \omega_x \Sigma m xz - \omega_y \Sigma m yz + \Sigma m\left(y\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Сіи уравненія важны будутъ для насъ въ послѣдствіи; онѣ опредѣляютъ положеніе оси z_1 относительно осей перемѣщающихся въ пространствѣ; положеніе же оси z_1 относительно осей координатъ x_2, y_2, z_2, остающихся параллельными осямъ неподвижнымъ въ пространствѣ, опредѣлится изъ уравненій (73):

$$a''_1 = \cos(z_1, x_2) = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}, \quad b''_1 = \cos(z_1, y_2) = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}, \quad c''_1 = \cos(z_1, z_2) = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}$$

что показываетъ, что положеніе оси z_1 постоянно относительно осей координатъ x_2, y_2, z_2. Въ семъ смыслѣ z_1 называется осью неизмѣняемой плоскости.

9. Помноживъ уравненія (59) соотвѣтственно на $\partial x, \partial y, \partial z, \partial x', \ldots$ и складывая ихъ, въ суммѣ получаемъ:

$$\Sigma m\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\partial x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\cdot\partial z\right) = \frac{1}{2}\,\partial\,\Sigma m\left(\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{\partial t^2}\right) = \Sigma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z)$$

$$-\frac{a\cdot\partial^2\xi_1 + b\cdot\partial^2\eta_1 + c\cdot\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma m\,\partial x - \frac{a'\cdot\partial^2\xi_1 + b'\cdot\partial^2\eta_1 + c'\cdot\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma m\,\partial y - \frac{a''\cdot\partial^2\xi_1 + b''\cdot\partial^2\eta_1 + c''\cdot\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma m\,\partial z$$

$$-\frac{\partial\omega_x}{\partial t}\Sigma m(y\partial z - z\partial y) - \frac{\partial\omega_y}{\partial t}\Sigma m(z\partial x - x\partial z) - \frac{\partial\omega_z}{\partial t}\Sigma m(x\partial y - y\partial x) + \frac{\omega_x^2}{2}\,\partial\,\Sigma m(y^2+z^2) + \frac{\omega_y^2}{2}\,\partial\,\Sigma m(z^2+x^2) + \frac{\omega_z^2}{2}\,\partial\,\Sigma m(x^2+y^2)$$

$$-\omega_y\,\omega_z\,.\,\partial\,\Sigma m yz - \omega_z\,\omega_x\,.\,\partial\,\Sigma m zx - \omega_x\,\omega_y\,.\,\partial\,\Sigma m xy + \Theta_1\,.\,\partial t + \Theta_2\,.\,\partial t + \ldots + \Omega_1\,.\,\partial t + \Omega_2\,.\,\partial t + , \quad . \quad (75)$$

гдѣ члены, выражающіе силу инерціи:

$$2m\left(\omega_y.\frac{\partial z}{\partial t} - \omega_z.\frac{\partial y}{\partial t}\right),\quad 2m\left(\omega_z.\frac{\partial x}{\partial t} - \omega_x.\frac{\partial z}{\partial t}\right),\quad 2m\left(\omega_x.\frac{\partial y}{\partial t} - \omega_y.\frac{\partial x}{\partial t}\right), \ldots\ldots;$$

развивающуюся при дѣйствительномъ перемѣщеніи относительно подвижныхъ осей координатъ, взаимно сокращаются, что и должно было ожидать, припомнивъ выраженія (45).

Если условія системы не измѣняются со временемъ въ отношеніи подвижныхъ осей координатъ: $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$, ... $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, ..., если подвижныя оси координатъ такъ перемѣщаются, что:

$$\frac{a\cdot\partial^2\xi_1 + b\cdot\partial^2\eta_1 + c\cdot\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}, \quad \frac{a'\cdot\partial^2\xi_1 + b'\cdot\partial^2\eta_1 + c'\cdot\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}, \quad \frac{a''\cdot\partial^2\xi_1 + b''\cdot\partial^2\eta_1 + c''\cdot\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}$$

$$\omega_x, \ \omega_y, \ \omega_z$$

не измѣняются со временемъ, слѣд. постоянны, если наконецъ $\Sigma(X.\partial x + Y.\partial y + Z.\partial z)$

есть полный дифференціалъ нѣкоторой функціи отъ координатъ x, y, z, x' ...., то уравненіе (75) даетъ:

$$\frac{1}{2}\Sigma m\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{\partial t^2} = \int\Sigma(X\,\partial x + Y\,\partial y + Z\,\partial z) - \frac{a.\partial^2\xi_1 + b.\partial^2\eta_1 + c.\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma mx - \frac{a'\cdot\partial^2\xi_1 + b'\cdot\partial^2\eta_1 + c'\cdot\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma my$$

$$-\frac{a''.\partial^2\xi_1 + b''.\partial^2\eta_1 + c''.\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma mz + \frac{\omega_x^2}{2}\Sigma m(y^2+z^2) + \frac{\omega_y^2}{2}\Sigma m(z^2+x^2) - \frac{\omega_z^2}{2}\Sigma m(x^2+y^2)$$

$$-\omega_y\,\omega_z\,.\,\Sigma myz - \omega_z\,\omega_x.\,\Sigma m zx - \omega_x\,\omega_y.\,\Sigma mxy + C = \varphi(x, y, z, x', ..) + C \quad , \quad . \quad . \quad (76)$$

теорему живыхъ силъ при относительномъ движеніи системы мат. точекъ.

Если-бы

$$\frac{a\,.\,\partial^2\xi_1+b\,.\,\partial^2\eta_1+c\,.\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\,,\quad \frac{a'\,.\,\partial^2\xi_1+b'\,.\,\partial^2\eta_1+c'\,.\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\,,\quad \frac{a''\,.\,\partial^2\xi_1+b''\,.\,\partial^2\eta_1+c''\,.\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}$$

и не были постоянны, но было бы

$$\Sigma m\,dx=\partial\overline{x}\,.\,\Sigma m=0\,,\quad \Sigma m\,dy=\partial\overline{y}\,.\,\Sigma m=0\,,\quad \Sigma m\,dz=\partial\overline{z}\,.\,\Sigma m=0\,,$$

притомъ были-бы

$$\Theta_1=0\,,\ \Theta_2=0\,,\ \ldots\ldots\ \Omega_1=0\,,\ \Omega_2=0\,,\ \ldots\ldots,$$

а $\omega_x\,,\ \omega_y\,,\ \omega_z$

постоянны, то уравненіе живыхъ сихъ все таки бы существовало.

Такъ какъ

$$\frac{\omega_x^2}{2}\Sigma m(y^2+z^2)+\frac{\omega_y^2}{2}\Sigma m(z^2+x^2)+\frac{\omega_z^2}{2}\Sigma m(x^2+y^2)-\omega_y\,\omega_z\,\Sigma myz-\omega_z\,\omega_x\,\Sigma mzx-\omega_x\,\omega_y\,\Sigma mxy=$$

$$=\frac{\omega^2}{2}\Big\{\cos^2(l\,,x).\,\Sigma m\,(x^2+y^2)+\cos^2(l\,,y).\,\Sigma m\,(z^2+x^2)+\cos^2(l\,,z).\,\Sigma m\,(x^2+y^2)$$

$$-2\cos(l\,,y).\,\cos(l\,,z)\,\Sigma m\,yz-2\cos(l\,,z).\,\cos(l\,,x)\,\Sigma m\,zx-2\cos(l\,,x).\,\cos(l\,,y)\,\Sigma m\,xy\Big\}=\frac{\omega^2}{2}K\,,\quad (77)$$

гдѣ K означаетъ моментъ инерціи относительно оси вращенія l, то по уравненію (76):

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\Sigma m\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{\partial t^2}=\int\Sigma(X.\,dx+Y.\,dy+Z.\,dz)-\frac{a\,\partial^2\xi_1+b\,\partial^2\eta_1+c\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma mx\\ -\frac{a'\,\partial^2\xi_1+b'\,\partial^2\eta_1+c'\,\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma my-\frac{a''\,\partial^2\xi_1+b''\,\partial^2\eta_1+c''\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}\Sigma mz+\frac{\omega^2}{2}K+C_1\end{aligned}\right\}.\quad (78)$$

Уравненіе (78) имѣетъ, напр., приложеніе къ движенію системы мат. точекъ въ отношеніи осей, неизмѣняемо соединенныхъ съ землею и обращающихся слѣд. вмѣстѣ съ нею около ея оси.

Зависимость между дѣйствительною живою силою системы и относительною опредѣлится уравненіемъ:

$$\Sigma m\left(\frac{\partial x_1^2+\partial y_1^2+\partial z_1^2}{\partial t^2}\right)=\Sigma m\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\partial t^2}\right).$$

Вставляя сюда вмѣсто dx, dy, dz ихъ величины по уравненіямъ (26), находимъ:

$$\Sigma m\frac{\partial x_1^2+\partial y_1^2+\partial z_1^2}{\partial t^2}=\Sigma m\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{\partial t^2}+\Sigma m\Big\{\Big(\frac{a\,\partial\xi_1+b\,\partial\eta_1+c\,\partial\zeta_1}{\partial t}+z\omega_y-y\omega_z\Big)^2+\Big(\ldots\ldots\Big)^2+\Big(\ldots\ldots\Big)^2$$

$$+2\Big(\frac{a\,\partial\xi_1+b\,\partial\eta_1+c\,\partial\zeta_1}{\partial t}+z\omega_y-\omega y_z\Big)\frac{\partial x}{\partial t}+2\Big(\ldots\ldots\Big)\frac{\partial y}{\partial t}+2\Big(\ldots\ldots\Big)\frac{\partial z}{\partial t}\Big\}.\quad (79)$$

Когда

$$a\,\partial\xi_1+b\,\partial\eta_1+c\,\partial\zeta_1=0\,,\quad a'\,\partial\xi_1+b'\,\partial\eta_1+c'\,\partial\zeta_1=0\,,\quad a''\,\partial\xi_1+b''\,\partial\eta_1+c''\,\partial\zeta_1=0\,,$$

или, что все равно:

$$\partial\xi_1=0\,,\quad \partial\eta_1=0\,,\quad \partial\zeta_1=0\,,$$

то по ур. (79)

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\left(\frac{\partial x_1^2+\partial y_1^2+\partial z_1^2}{\partial t^2}\right)=\Sigma m\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{\partial t^2}+\Sigma m\Big\{(z\omega_y-y\omega_z)^2+(x\omega_z-z\omega_x)^2+(y\omega_x-x\omega_y)^2\Big\}\\ +2\,\Sigma m\Big\{(z\omega_y-y\omega_z)\frac{\partial x}{\partial t}+(x\omega_z-z\omega_x)\frac{\partial y}{\partial t}+(y\omega_x-x\omega_y)\frac{\partial z}{\partial t}\Big\}\\ =\Sigma m\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{\partial t^2}+\omega^2K+2\,\Sigma m\Big\{(z\omega_y-y\omega_z)\frac{\partial x}{\partial t}+(x\omega_z-z\omega_x)\frac{\partial y}{\partial t}+(y\omega_x-x\omega_y)\frac{\partial z}{\partial t}\Big\}\end{aligned}\right\},\ (80)$$

если обратимъ вниманіе на уравненіе (77).

10. Пріемникъ движущей силы въ машинахъ состоитъ изъ одной или нѣсколькихъ перемѣщающихся поверхностей, на которыя вступаетъ и по которымъ потомъ движется извѣстная система матеріальныхъ точекъ, служащая посредствующею массою для передачи машинѣ работы движущихъ силъ. Работа давленій, производимыхъ системою матеріальныхъ точекъ на движущіяся поверхности пріемника, равная работѣ сопротивленій сихъ поверхностей, есть полезная работа, переданная машинѣ.

Чтобы не произошло удара и слѣдовательно потери работы отъ удара, надобно, чтобы координаты $x_1, y_1, z_1, x'_1, \ldots$ и скорости $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \frac{dx'_1}{dt}, \ldots$ системы матеріальныхъ точекъ удовлетворяли какъ при вступленіи системы на поверхность пріемника, такъ и во время дѣйствія ея на нихъ, уравненіямъ (3) и (4), выражающимъ упомянутыя поверхности. Предполагая сіе условіе исполненнымъ, изъ уравненія (10), существующаго для всякаго совершенно произвольнаго перемѣщенія системы, и слѣд. для ея дѣйствительнаго перемѣщенія, получаемъ полезную работу, переданную машинѣ:

$$Tr.\,abs. = -\int \lambda_1 \Sigma a_1 [\cos(A_1, x_1) . dx_1 + \cos(A_1, y_1) . dy_1 + \cos(A_1, z_1) . dz_1] - \ldots$$

$$= \int \Sigma (X_1\, dx_1 + Y_1\, dy_1 + Z_1\, dz_1) - \frac{1}{2} \Sigma m \left(\frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}{dt^2} \right) + C \;\ldots\ldots \quad (81)$$

Въ уравненіи (75) члены

$$\Theta_1 . \partial t + \Theta_2 . \partial t + \ldots + \Omega_1 . \partial t + \Omega_2 . \partial t + \ldots = \lambda_1 \Sigma a_1 [\cos(A_1, x) . \partial x + \cos(A_1, y) . \partial y + \cos(A_1, z) . \partial z] - \ldots$$

выражаютъ элементарную работу сопротивленій при относительномъ движеніи системы мат. точекъ и урав. (75) опредѣляетъ сію работу. Предполагая, что

$$\frac{a . \partial^2\xi_1 + b . \partial^2\eta_1 + c . \partial^2\zeta_1}{\partial t^2}, \quad \frac{a' . \partial^2\xi_1 + b' . \partial^2\eta_1 + c' . \partial^2\zeta_1}{\partial t^2}, \quad \frac{a'' . \partial^2\xi_1 + b'' . \partial^2\eta_1 + c'' . \partial^2\zeta_1}{\partial t^2}$$

$$\omega_x, \quad \omega_y, \quad \omega_z$$

постоянны, изъ уравненія (75) получаемъ относительную работу давленій (относительную полезную работу машины):

$$Tr.\,relat. = \int \Sigma (X . \partial x + Y . \partial y + Z . \partial z) - \frac{1}{2} \Sigma m \left(\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} \right)$$

$$- \frac{a\, \partial^2\xi_1 + b\, \partial^2\eta_1 + c\, \partial^2\zeta_1}{\partial t^2} \Sigma mx + \frac{a'\, \partial^2\xi_1 + b'\, \partial^2\eta_1 + c'\, \partial^2\zeta_1}{\partial t^2} \Sigma my - \frac{a''\, \partial^2\xi_1 + b''\, \partial^2\eta_1 + c''\, \partial^2\zeta_1}{\partial t^2} \Sigma mz + \frac{\omega^2}{2} K + C. \quad (82)$$

Это уравненіе важно для насъ въ томъ отношеніи, что показываетъ намъ вліяніе вращательнаго движенія земли на работу машинъ, дѣйствующихъ на поверхности земли.

Уравненіе (81) выражаетъ работу давленій при перемѣщеніи системы матеріальныхъ точекъ относительно неподвижныхъ осей. Поверхности пріемниковъ обыкновенно движутся такимъ образомъ, что всегда можно выбрать такія оси координатъ x, y, z, которыя перемѣщаются вмѣстѣ съ поверхностями, слѣдовательно $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$, ... $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, ... и для которыхъ ξ_1, η_1, ζ_1, ω_x, ω_y, ω_z постоянны. Въ семъ предположеніи вставляя въ уравненіе (81) вмѣсто абсолютной живой силы ея величину по уравненію (80) и вмѣсто относительной живой силы ея величину по уравненію (78), получаемъ:

$$Tr.\,abs. = \int \Sigma (X_1 . dx_1 + Y_1 . dy_1 + Z_1 . dz_1) - \int \Sigma (X . \partial x + Y . \partial y + Z . \partial z)$$

$$- \omega^2 K - \Sigma m \left\{ (z\omega_y - y\omega_z) \frac{\partial x}{\partial t} + (x\omega_z - z\omega_x) \frac{\partial y}{\partial t} + (y\omega_x - x\omega_y) \frac{\partial z}{\partial t} \right\} + C .$$

Вставлая въ сіе уравненіе вмѣсто dx_1, dy_1, dz_1 ихъ величины по уравненіямъ (27), въ которыхъ

$$\partial\xi_1 = 0, \quad \partial\eta_1 = 0, \quad \partial\zeta_1 = 0,$$

получаемъ:

$$Tr.\,abs. = \int \{\omega_x . \Sigma m (Zy - Yz) + \omega_y . \Sigma m (Xz - Zx) + \omega_z . \Sigma m (Yx - Xy)\}\, \partial t$$

$$- \omega^2 K - \Sigma m \{(z\omega_y - y\omega_z) \frac{\partial x}{\partial t} + (z\omega_z - z\omega_x) \frac{\partial y}{\partial t} + (y\omega_x - x\omega_y) \frac{\partial z}{\partial t} + C .$$

Уравненіе сіе важно въ приложеніи къ теоріи колеса Понселе, тюрбинамъ и пр.

Кіевъ 15-го Января 1861.

Ив. Рахманиновъ.

Объобщеніе формулъ, относящихся къ показательнымъ и логарифмическимъ функціямъ.

Во многихъ курсахъ математическаго анализа можно найти формулу, дающую безчисленное множество мнимыхъ логариѳмовъ даннаго вещественнаго, или мнимаго числа. Формула эта, несмотря на кажущуюся общность, тѣмъ не менѣе лишена оной,—потому что, кромѣ доставляемыхъ ею логариѳмовъ, существуетъ ихъ несравненно большее число, — такъ что если число доставляемыхъ формулою логарифмовъ безконечно-большое перваго порядка, то число всѣхъ существующихъ логариѳмовъ — безконечно - большое втораго порядка. Есть даже такія отрицательныя и мнимыя числа, которыя имѣютъ вещественные логариѳмы, чего вышеупомянутая формула никогда не доставитъ. Недостаточность ея есть слѣдствіе недостаточности формулы:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots,$$

изъ которой она выводится, и въ которой e есть извѣстное основаніе 2,7182818284 . . . Неперовой системы логариѳмовъ, получаемое изъ ряда:

$$1 + 1 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots$$

Что послѣдняя формула лишена общности, видно изъ того, что вторая ея часть для какого-либо даннаго значенія x имѣетъ одно значеніе; между тѣмъ какъ e^x только для x равнаго цѣлому числу имѣетъ одно значеніе, а при x дробномъ соизмѣримомъ число значеній этой функціи равняется знаменателю дроби; и наконецъ, по аналогіи надобно ожидать безконечнаго множества значеній этой функціи, когда x число несоизмѣримое

Я намѣренъ объобщить послѣднюю формулу, и на основаніи ея вывести болѣе общую формулу для нахожденія логариѳмовъ. За основаніе показательныхъ функцій я приму Неперово; а потому и логариѳмы, о которыхъ поведу рѣчь, будутъ Неперовы; распространить же полученные мною выводы на логариѳмы какой-угодно системы не представитъ никакой трудности.

Условимся то значеніе функціи e^x, которое даетъ рядъ

$$1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots,$$

изображать чрезъ e^x, а какое-ни-есть значеніе этой функціи чрезъ $((e^x))$. Подобнаго обозначенія будемъ держаться и въ другихъ случаяхъ, употребляя двойныя скобки при разсматриваніи какого ни-есть значенія выраженія, имѣющаго нѣсколько величинъ.

Пусть m и n цѣлыя положительныя взаимно простыя числа, тогда:

$$((e^{\frac{m}{n}})) = e^{\frac{m}{n}}((1^{\frac{m}{n}})) = e^{\frac{m}{n}}\left[\cos\left(2k\pi\frac{m}{n}\right) + i\sin\left(2k\pi\frac{m}{n}\right)\right],$$

гдѣ k какое угодно цѣлое (положительное или отрицательное) число, $e^{\frac{m}{n}}$ ариѳметическое значеніе корня $\sqrt[n]{e^m}$, которое можно получить непосредственнымъ извлеченіемъ, или изъ ряда

$$1 + \frac{m}{n} + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{1\,.\,2} + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots;$$

π отношеніе окружности къ діаметру (3,14159 . . . .); i мнимый знакъ, выражающій $\sqrt{-1}$.

Хотя числу k можно приписывать безчисленное множество цѣлыхъ значеній, но несмотря на то вторая часть послѣдней формулы имѣетъ ровно n различныхъ значеній. Убѣдиться въ этомъ легко: въ самомъ дѣлѣ, каково-бы цѣлое число k ни-было (положительное или отрицательное), всегда существуетъ равноостаточное ему число по модулю n, заключающееся въ ряду 0, 1, 2, 3, ... , $n-1$; и потому, числу k всегда можно дать видъ $qn + k'$, гдѣ q цѣлое число, положительное или отрицательное, или 0, а k' одно изъ чиселъ 0, 1, 2, 3, ... , $n-1$. Подставляя $qn + k'$ на мѣсто k въ выраженіе

$$\cos\left(2k\pi\frac{m}{n}\right) + i\sin\left(2k\pi\frac{m}{n}\right),$$

мы приведемъ его, на основаніи извѣстной періодичности тригонометрическихъ функцій, къ виду:

$$\cos\left(2k'\pi\frac{m}{n}\right) + i\sin\left(2k'\pi\frac{m}{n}\right),$$

откуда и заключаемъ, что число значеній $\left((e^{\frac{m}{n}})\right)$ не болѣе n: ибо k' можемъ приписывать только значенія 0, 1, 2, 3, ... , $n-1$. Равныхъ же значеній, соотвѣтствующихъ различнымъ k', послѣднее выраженіе имѣть не можетъ; потому что, допуская:

$$\cos\left(2k'\pi\frac{m}{n}\right) + i\sin\left(2k'\pi\frac{m}{n}\right) = \cos\left(2k''\pi\frac{m}{n}\right) + i\sin\left(2k''\pi\frac{m}{n}\right)$$

находимъ:

$$\cos\left(2k'\pi\frac{m}{n}\right) = \cos\left(2k''\pi\frac{m}{n}\right)$$

$$\sin\left(2k'\pi\frac{m}{n}\right) = \sin\left(2k''\pi\frac{m}{n}\right),$$

откуда, предполагая $k' > k''$,

$$2k'\pi\frac{m}{n} = 2k''\pi\frac{m}{n} + 2K\pi,$$

гдѣ K цѣлое и положительное число; а отсюда выводимъ:

$$\frac{(k' - k'')\,m}{n} = K,$$

что невозможно, ибо $k' - k'' < n$, а m и n числа первыя между собою.

И такъ формула

$$((e^{\frac{m}{n}})) = e^{\frac{m}{n}}\left[\cos\left(2k\pi\frac{m}{n}\right) + i\sin\left(2k\pi\frac{m}{n}\right)\right]$$

даетъ всѣ n значеній выраженія $e^{\frac{m}{n}}$.

Замѣняя въ ней $\frac{m}{n}$ чрезъ x, имѣемъ:

$$((e^x)) = e^x\,[\cos(2k\pi x) + i\sin(2k\pi x)]\,,$$

гдѣ подъ x покамѣсть разумѣемъ раціональное положительное число.

Эта формула имѣетъ мѣсто и для показателя раціональнаго отрицательнаго; въ самомъ дѣлѣ:

$$((e^{-x})) = \frac{1}{((e^x))} = \frac{1}{e^x\,[\cos(2k\pi x) + i\sin(2k\pi x)]}$$

$$= e^{-x}\,[\cos(2k\pi x) - i\sin 2k\pi x\,]$$

$$= e^{-x}\,[\cos(-2k\pi x) + i\sin(-2k\pi x)]\,.$$

Остается распространить ее на случай показателя несоизмѣримаго. Но что разумѣть подъ $((e^x))$ при x ирраціональномъ? — конечно, предѣлъ, къ которому стремится

$$((e^{\frac{\alpha}{\beta}}))$$

съ приближеніемъ раціональнаго отношенія $\frac{\alpha}{\beta}$ (α и β цѣлыя числа) къ ирраціонному числу x. Слѣдовательно для распространенія нашей формулы, стоитъ только убѣдиться въ существованіи этого предѣла, или иначе, предѣла, къ которому стремится

$$e^{\frac{\alpha}{\beta}}\left[\cos\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right) + i\sin\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$$

при приближеніи $\frac{\alpha}{\beta}$ къ x.

Обратимъ несоизмѣримое число x въ непрерывную дробь вида:

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + }}}\,,$$

и возьмемъ двѣ смежныя подходящія дроби $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\alpha'}{\beta'}$, разность между которыми, какъ извѣстно, равна $\frac{1}{\beta\beta'}$, и можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, ибо числа β и β' могутъ превысить всякое число. Существованіе предѣла докажется, если мы докажемъ, что разность

$$\Delta = e^{\frac{\alpha'}{\beta'}}\left[\cos\left(2k\pi\frac{\alpha'}{\beta'}\right) + i\sin\left(2k\pi\frac{\alpha'}{\beta'}\right)\right] - e^{\frac{\alpha}{\beta}}\left[\cos\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right) + i\sin\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$$

можно сдѣлать произвольно малою. Мы убѣдимся въ этомъ сперва порознь для каждой изъ разностей:

$$e^{\frac{\alpha'}{\beta'}} - e^{\frac{\alpha}{\beta}} = \delta$$

$$\cos\left(2k\pi\frac{\alpha'}{\beta'}\right) - \cos\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right) = \omega$$

$$\sin\left(2k\pi\frac{\alpha'}{\beta'}\right) - \sin\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right) = \omega'\,.$$

Для первой, въ слѣдствіе равенства $\frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta\beta'}$ (предполагая $\frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha}{\beta}$), имѣемъ:

$$\delta = e^{\frac{\alpha}{\beta}}\left(e^{\frac{1}{\beta\beta'}} - 1\right) = \gamma e^{\frac{\alpha}{\beta}}\,,\ \text{гдѣ}\ \gamma = e^{\frac{1}{\beta\beta'}} - 1\,;$$

отсюда:

$$e = (1+\gamma)^{\beta\beta'} = 1 + \beta\beta'\gamma + \frac{\beta\beta'(\beta\beta'-1)}{1\,.\,2}\gamma^2 + \frac{\beta\beta'(\beta\beta'-1)(\beta\beta'-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\gamma^3 + \ldots$$

Слѣдовательно:

$$e > 1 + \beta\beta'\gamma\,,\ \text{откуда:}\ \gamma < \frac{e-1}{\beta\beta'}\,,$$

что и показываетъ, что γ, а слѣдовательно и разность δ, можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины.

Разности же ω и ω' можно представить такъ:

$$\omega = -2\sin\left[k\pi\left(\frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\sin\left[k\pi\left(\frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] = 2\sin\left[k\pi\left(\frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\sin\left(\frac{k\pi}{\beta\beta'}\right)$$

$$\omega' = 2\cos\left[k\pi\left(\frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\sin\left[k\pi\left(\frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] = -2\cos\left[k\pi\left(\frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\sin\left(\frac{k\pi}{\beta\beta'}\right)\,.$$

Присутствіе въ каждой изъ нихъ множителя $\sin\left(\frac{k\pi}{\beta\beta'}\right)$, который можетъ сдѣлаться произвольно малымъ, причемъ другой множитель никогда не выйдетъ изъ предѣловъ -2 и $+2$, доказываетъ, что ω и ω' можно уменьшить произвольно.

Наконецъ для разности Δ имѣемъ:

$$\varDelta = \left[\cos\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right) + i\sin\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\delta + \left(e^{\frac{\alpha}{\beta}} + \delta\right)(\omega + i\,\omega')\ ;$$

откуда видимъ, что и $\varDelta$ можетъ быть сдѣлано менѣе всякой данной величины.

И такъ существованіе предѣла, къ которому стремится выраженіе

$$e^{\frac{\alpha}{\beta}}\left[\cos\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right) + i\sin\left(2k\pi\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$$

съ приближеніемъ раціональнаго отношенія $\frac{\alpha}{\beta}$ къ ирраціональному числу x, доказано. И притомъ этотъ предѣлъ, который мы будемъ писать

$$e^x\left[\cos(2k\pi x) + i\sin(2k\pi x)\right] \quad \text{или} \quad ((e^x)),$$

для различныхъ k имѣетъ различныя значенія, въ слѣдствіе чего $((e^x))$ при x несоизмѣримомъ имѣетъ безчисленное множество значеній. Чтобы убѣдиться въ справедливости послѣдняго замѣчанія, допустимъ, что при неравныхъ k и k' имѣемъ:

$$e^x\left[\cos(2k\pi x) + i\sin(2k\pi x)\right] = e^x\left[\cos(2k'\pi x) + i\sin(2k'\pi x)\right];$$

тогда: $2k\pi x = 2k'\pi x + 2K\pi$, гдѣ K цѣлое число;

а отсюда: $x = \frac{K}{k-k'}$,

т. е. несоизмѣримое число x равно соизмѣримому $\frac{K}{k-k'}$, что невозможно.

И такъ мы показали значеніе функціи $((e^x))$ при x соизмѣримомъ и несоизмѣримомъ и видѣли, что въ первомъ случаѣ число значеній этой функціи, соотвѣтствующихъ данному x, равно знаменателю выраженія x, а во второмъ — безконечно велико. Спрашивается теперь, что разумѣть подъ $((e^x))$ при x мнимомъ? — Условимся и въ этомъ случаѣ разумѣть выраженіе

$$e^x\left[\cos(2k\pi x) + i\sin(2k\pi x)\right],$$

въ которомъ значенія показательной и тригонометрическихъ функцій получатся изъ извѣстныхъ разложеній ихъ въ ряды. Такъ, если x и y числа вещественныя, то, по данному сейчасъ опредѣленію, имѣемъ:

$$((e^{x+yi})) = e^{x+yi}\left[\cos\left(2k\pi(x+yi)\right) + i\sin\left(2k\pi(x+yi)\right)\right],$$

или, полагая $x+yi = z$,

$$((e^z)) = \left[1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots\right]\left[1 - \frac{(2k\pi z)^2}{1.2} + \frac{(2k\pi z)^4}{1.2.3.4} - \dots + \right.$$
$$\left. + i\left\{2k\pi z - \frac{(2k\pi z)^3}{1.2.3} + \frac{(2k\pi z)^5}{1.2.3.4.5} - \dots\right\}\right].$$

что приводится къ виду:

$$((e^z)) = \left[1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots\right]\left[1 + 2k\pi zi + \frac{(2k\pi zi)^2}{1.2} + \frac{(2k\pi zi)^3}{1.2.3} + \dots\right].$$

Произведеніе двухъ послѣднихъ строкъ можно замѣнить одною, пользуясь тождествомъ

$$\left[1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots\right]\left[1 + z' + \frac{z'^2}{1.2} + \frac{z'^3}{1.2.3} + \dots\right] = 1 + (z+z') + \frac{(z+z')^2}{1.2} + \frac{(z+z')^3}{1.2.3} + \dots,$$

которое, въ силу своей тождественности, имѣетъ мѣсто и при мнимыхъ значеніяхъ z и z'; поэтому:

$$((e^z)) = 1 + (z + 2k\pi zi) + \frac{(z+2k\pi zi)^2}{1.2} + \frac{(z+2k\pi zi)^3}{1.2.3} + \dots$$

Но: $z = x + yi$; слѣдовательно:

$$z + 2k\pi zi = x + yi + 2k\pi(x+yi)i = x - 2k\pi y + (2k\pi x + y)i.$$

Полагая:

$$x - 2k\pi y = \alpha, \qquad 2k\pi x + y = \beta,$$

(въ слѣдствіе чего: $z + 2k\pi zi = \alpha + \beta i$, гдѣ α и β числа вещественныя), имѣемъ:

$$((e^{x+yi})) = 1 + (\alpha+\beta i) + \frac{(\alpha+\beta i)^2}{1.2} + \frac{(\alpha+\beta i)^3}{1.2.3} + \dots = \left[1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + ..\right]\left[1 + \beta i + \frac{(\beta i)^2}{1.2} + \frac{(\beta i)^3}{1.2.3} + .\right] = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta),$$

или:

$$((e^{x+yi})) = e^{x-2k\pi y}\left[\cos(2k\pi x + y) + i\sin(2k\pi x + y)\right].$$

Этого результата мы достигли-бы скорѣе, если-бы формулѣ, выражающей $((e^x))$, дали видъ:

$$((e^x)) = e^x\, e^{2k\pi xi} = e^{x+2k\pi xi} \quad (*)$$

(*) Читатель можетъ спросить, на какомъ основаніи произведеніе двухъ показательныхъ функцій e^x и $e^{2k\pi xi}$ мы замѣняемъ одною, складывая показатели, несмотря на то, что показатели или оба мнимые, или одинъ изъ нихъ. Это доказывается очень просто: если-бы z и z' были вещественные, то мы имѣли-бы:

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}, \quad \text{или:}$$

Тогда, подставляя въ нее $x+yi$ на мѣсто x, получимъ:

$$((e^{x+yi})) = e^{x-2k\pi y+(2k\pi x+y)i} = e^{x-2k\pi y}\, e^{(2k\pi x+y)i}$$
$$= e^{x-2k\pi y}\,[\cos(2k\pi x+y) + i\sin(2k\pi x+y)]\ .$$

Теперь перейдемъ къ логариѳмамъ. Употребляя знакъ l для обозначенія Неперова логариѳма, и полагая:

$$e^{x-2k\pi y}\cos(2k\pi x+y) = M$$
$$e^{x-2k\pi y}\sin(2k\pi x+y) = N\ ,$$

изъ уравненія: $((e^{x+yi})) = M + Ni$, находимъ:

$$l\,((M+Ni)) = x + yi\ ,$$

гдѣ двойныя скобки означаютъ какой ни-есть Неперовъ логариѳмъ числа $M + Ni$ (здѣсь M и N вещественныя). Чтобы найти всѣ логариѳмы послѣдняго числа, надобно пріискать всѣ возможныя вещественныя значенія x и y, при которыхъ послѣднее равенство можетъ быть удовлетворено для однихъ и тѣхъ же данныхъ значеній M и N. Выраженія M и N даютъ:

$$e^{2(x-2k\pi y)} = M^2 + N^2$$
$$\operatorname{tg}(2k\pi x + y) = \frac{N}{M}\ ,$$

откуда:

$$x - 2k\pi y = l\sqrt{M^2+N^2}$$
$$2k\pi x + y = \text{arc. tg.}\,\frac{N}{M}\ .$$

Разрѣшая эти уравненія относительно x и y, получимъ:

$$x = \frac{l\sqrt{M^2+N^2} + 2k\pi\ \text{arc. tg.}\,\frac{N}{M}}{1+4k^2\pi^2}\ ,$$

$$y = \frac{\text{arc.tg.}\,\frac{N}{M} - 2k\pi\, l\sqrt{M^2+N^2}}{1+4k^2\pi^2}$$

Здѣсь $l\sqrt{M^2+N^2}$ есть вещественное число, а именно ариѳметическій логариѳмъ модуля числа $M + Ni$; а $\text{arc. tg.}\,\frac{N}{M}$ имѣетъ безчисленное множество значеній (конечно вещественныхъ), такъ что если наименьшее изъ положительныхъ значеній (включая сюда и 0, если онъ—одно изъ значеній) назовемъ чрезъ φ, то:

$$\text{arc. tg.}\,\frac{N}{M} = \varphi + 2k'\pi\ ,$$

гдѣ k' какое ни-есть цѣлое число, положительное или отрицательное, или 0.

Очевидно, знакъ $\sin\varphi$ одинаковъ съ знакомъ N, а знакъ $\cos\varphi$ съ знакомъ M; въ слѣдствіе этого:

$$\left.\begin{matrix}\varphi > 0\\ < \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}\ \text{когда}\ \left\{\begin{matrix}N > 0\\ M > 0\end{matrix}\right.$$

$$\varphi = 0\ \Big\}\ .\ .\ .\ \left\{\begin{matrix}N = 0\\ M > 0\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\varphi > \frac{3\pi}{2}\\ < 2\pi\end{matrix}\right\}\ .\ .\ .\ \left\{\begin{matrix}N < 0\\ M > 0\end{matrix}\right.$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\ \Big\}\ .\ .\ .\ \left\{\begin{matrix}N > 0\\ M = 0\end{matrix}\right.$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}\ \Big\}\ .\ .\ .\ \left\{\begin{matrix}N < 0\\ M = 0\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\varphi > \frac{\pi}{2}\\ < \pi\end{matrix}\right\}\ .\ .\ .\ \left\{\begin{matrix}N > 0\\ M < 0\end{matrix}\right.$$

$$\varphi = \pi\ \Big\}\ .\ .\ .\ \left\{\begin{matrix}N = 0\\ M < 0\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\varphi > \pi\\ < \frac{3\pi}{2}\end{matrix}\right\}\ .\ .\ .\ \left\{\begin{matrix}N < 0\\ M < 0\end{matrix}\right.$$

И такъ, назвавъ модуль $M + Ni$ чрезъ m, имѣемъ:

$$l\,((M+Ni)) = \frac{lm + 2k\pi(\varphi + 2k'\pi) + i(\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\, lm)}{1+4k^2\pi^2}$$

Вотъ общая формула, въ которой заключаются всѣ Неперовы логариѳмы числа $M + Ni$; изъ нея извѣстная формула

$$l\,((M+Ni)) = lm + i(\varphi + 2k'\pi)$$

получается какъ частный случай при положеніи $k=0$.

Въ нашей формулѣ можно измѣнять по произволу два цѣлыхъ числа k и k', между тѣмъ какъ въ послѣдней только одно k'; поэтому хотя послѣдняя даетъ безчисленное множество значеній для логариѳма одного и того же числа, но не всѣ; наша же доставляетъ всѣ логарифмы, коихъ счетомъ, очевидно, въ безконечно бо́льшее число разъ болѣе противу доставляемыхъ послѣднею формулой.

Давая M и N послѣдовательно значенія:

$$M = 1\ ,\quad N = 0\ ,$$
$$M = -1\ ,\quad N = 0\ ,$$
$$M = 0\ ,\quad N = 1\ ,$$
$$M = 0\ ,\quad N = -1\ ,$$

при чемъ въ первомъ случаѣ $\varphi = 0$, во второмъ $\varphi = \pi$,

---

$$[1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots]\ [1 + z' + \frac{z'^2}{1.2} + \frac{z'^3}{1.2.3} + \ldots] = 1 + (z+z') + \frac{(z+z')^2}{1.2} + \frac{(z+z')^3}{1.2.3} + \ldots$$

Такъ какъ послѣднее равенство имѣетъ мѣсто при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ z и z', то оно тождественное; по причинѣ же тождественности оно должно удовлетворяться и при какихъ угодно z и z' (хотя бы и мнимыхъ); но каковы бы z и z' ни были, эти ряды выражаютъ чрезъ e^z, $e^{z'}$, $e^{z+z'}$; слѣдовательно при всякихъ z и z': $e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$

въ третьемъ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, въ четвертомъ $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, и во всѣхъ четырехъ $lm = l\,1 = 0$, будемъ имѣть:

$$l\,((1)) = \frac{2k'\pi}{1+4k^2\pi^2}\,(2k\pi + i)$$

$$l\,((-1)) = \frac{(2k'+1)\pi}{1+4k^2\pi^2}\,(2k\pi + i)$$

$$l\,((i)) = \frac{(4k'+1)\pi}{2(1+4k^2\pi^2)}\,(2k\pi + i)$$

$$l\,((-i)) = \frac{(4k'+3)\pi}{2(1+4k^2\pi^2)}\,(2k\pi + i).$$

Отсюда видимъ, что каждое изъ чиселъ $1, -1, i$ и $-i$ имѣетъ безчисленное множество мнимыхъ логариѳмовъ и ни одного вещественнаго, исключая числа 1, которое, кромѣ мнимыхъ логариѳмовъ, имѣетъ одинъ вещественный, именно 0, соотвѣтствующій $k=0$.

Въ справедливости выведенной нами общей логариѳмической формулы мы можемъ убѣдиться и путемъ обратнымъ, а именно показавъ, что одинъ изъ результатовъ возвышенія e въ степень

$$\frac{lm + 2k\pi\,(\varphi + 2k'\pi) + i\,(\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\,lm)}{1 + 4k^2\pi^2}$$

есть $M + Ni$; дѣйствительно, на основаніи формулы

$$((e^{x+yi})) = e^{x - 2ky\pi}\,[\cos(2K\pi x + y) + i\sin(2K\pi x + y)],$$

дѣлая въ ней:

$$x = \frac{lm + 2k\pi\,(\varphi + 2k'\pi)}{1 + 2k^2\pi^2}$$

$$y = \frac{\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\,lm}{1 + 4k^2\pi^2},$$

получимъ:

$$((e^{\frac{lm + 2k\pi\,(\varphi + 2k'\pi) + i\,(\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\,lm)}{1+4k^2\pi^2}})) = e^{\frac{lm + 2k\pi\,(\varphi + 2k'\pi) - 2K\pi\,(\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\,lm)}{1+4k^2\pi^2}}\,.$$

$$\cdot\left\{\cos\frac{2K\pi\,\{lm + 2k\pi\,(\varphi + 2k'\pi)\} + \varphi + 2k'\pi - 2k\pi\,lm}{1 + 4k^2\pi^2} + i\sin\frac{2K\pi\,\{lm + 2k\pi\,(\varphi + 2k'\pi)\} + \varphi + 2k'\pi - 2k\pi\,lm}{1 + 4k^2\pi^2}\right\}$$

$$= e^{\frac{(1+4K\pi^2)\,lm + 2\pi\,(k-K)\,(\varphi + 2k'\pi)}{1+4k^2\pi^2}}$$

$$\cdot\left\{\cos\frac{(1+4Kk\pi^2)\,(\varphi + 2k'\pi) + 2\pi\,(K-k)\,lm}{1+4k^2\pi^2} + i\sin\frac{(1+4Kk\pi^2)\,(\varphi + 2k'\pi)) + 2\pi\,(K-k)\,lm}{1+4k^2\pi^2}\right\},$$

что при $K = k$ обращается въ

$$e^{lm}[\cos(\varphi + 2k'\pi) + i\sin(\varphi + 2k'\pi)] = m\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = M + Ni.$$

Разсмотримъ теперь, какую форму должно имѣть число $M + Ni$, чтобы логариѳмъ его, хотя одинъ, былъ вещественный, и можетъ-ли оно имѣть болѣе одного вещественнаго логариѳма? Если для чиселъ M и N существуютъ такія цѣлыя значенія k и k', при которыхъ можетъ удовлетвориться равенство

$$\varphi + 2k'\pi = 2k\pi\,lm = 0,$$

то, конечно, соотвѣтствующій этимъ значеніямъ k и k' логариѳмъ числа $M + Ni$ будетъ вещественный и притомъ единственный, потому что онъ приводится къ

$$\frac{lm + 2k\pi\,(\varphi + 2k'\pi)}{1 + 4k^2\pi^2},$$

что, въ слѣдствіе равенства $\varphi + 2k'\pi = 2k\pi\,lm$, даетъ lm. И такъ видимъ, что ни вещественное, ни мнимое число не можетъ имѣть болѣе одного вещественнаго логариѳма, и если послѣдній существуетъ, то непремѣнно равняется ариѳметическому логариѳму модуля.

Для примѣра приведемъ мнимое число

$$-\frac{\sqrt[3]{e}}{2} + i\,\frac{\sqrt[3]{e}}{2}\sqrt{3},$$

въ которомъ подъ $\sqrt[3]{e}$ и $\sqrt{3}$ мы разумѣемъ ариѳметическіе корни. Изъ безчисленнаго множества логариѳмовъ этого числа есть одинъ вещественный; дѣйствительно, въ немъ:

$$M = -\frac{\sqrt[3]{e}}{2},\ N = \frac{\sqrt[3]{e}}{2}\sqrt{3};$$

слѣдовательно:

$$m = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{e^2}}{4} + \frac{3\sqrt[3]{e^2}}{4}} = \sqrt{\sqrt[3]{e^2}} = \sqrt[3]{e},$$

$$lm = \frac{1}{3},\ \varphi = \frac{2\pi}{3};$$

отсюда видимъ, что равенству

$$\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\,lm = 0,$$

или $$\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi - \frac{2k\pi}{3} = 0,$$

или $$1 + 3k' - k = 0$$

можно удовлетворить положеніями:

$$k' = 0 \qquad k' = 1 \qquad k' = 2$$
$$k = 1, \qquad k = 4, \qquad k = 7, \text{ и т. д}$$

И такъ вещественный логариѳмъ мнимаго числа $-\frac{\sqrt[8]{e}}{2} + i\frac{\sqrt[8]{e}}{2}\sqrt{3}$ есть $\frac{1}{3}$; и дѣйствительно между тремя значеніями $e^{\frac{1}{3}}$ есть одно равняющееся

$$-\frac{\sqrt[8]{e}}{2} + i\frac{\sqrt[8]{e}}{2}\sqrt{3}.$$

Найдемъ форму вещественнаго отрицательнаго числа, имѣющаго вещественный логариѳмъ (который если возможенъ, то только одинъ); для него $M < 0$, а $N = 0$, чему соотвѣтствуетъ $\varphi = \pi$; слѣдовательно условіе вещественности логариѳма требуетъ въ этомъ случаѣ удовлетворенія равенства

$$(2k'+1)\pi - 2k\pi\, lm = 0,$$

или: $\qquad 2k'+1 - 2k\, lm = 0, \qquad$ откуда:

$$lm = \frac{2k'+1}{2k},\ m = \sqrt[2k]{e^{2k'+1}},\ M = -\sqrt[2k]{e^{2k'+1}}$$

если k положительное; а если k отрицательное, то:

$$m = \sqrt[-2k]{e^{-(2k'+1)}},\ M = -\sqrt[-2k]{e^{-(2k'+1)}}.$$

И такъ отрицательное число, имѣющее вещественный логариѳмъ, по численной величинѣ равняется ариѳметическому корню четной степени изъ положительной или отрицательной нечетной степени Неперова основанія. Такъ, вещественные логариѳмы отрицательныхъ чиселъ.

$$-\sqrt{e},\ -\sqrt[4]{e^3},\ -\sqrt[6]{\frac{1}{e^5}} \text{ суть } \frac{1}{2},\ \frac{3}{4} \text{ и } -\frac{5}{6}.$$

Теперь докажемъ, что давая различныя значенія k и k' въ предложенной нами формулѣ, мы будемъ получать различные результаты, исключая весьма немногихъ случаевъ, при которыхъ существуютъ вещественные логариѳмы, другими словами, когда возможно удовлетворить уравненію

$$\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\, lm = 0.$$

Допустимъ, что:

$$\frac{lm + 2k\pi(\varphi + 2k'\pi) + i(\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\, lm)}{1 + 4k^2\pi^2} = \frac{lm + 2K\pi(\varphi + 2K'\pi) + i(\varphi + 2K'\pi - 2K\pi\, lm)}{1 + 4K^2\pi^2}$$

тогда очевидно:

$$\frac{lm + 2k\pi(\varphi + 2k'\pi)}{1 + 4k^2\pi^2} = \frac{lm + 2K\pi(\varphi + 2K'\pi)}{1 + 4K^2\pi^2},$$

$$\frac{\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\, lm}{1 + 4k^2\pi^2} = \frac{\varphi + 2K'\pi - 2K\pi\, lm}{1 + 4K^2\pi^2}.$$

Выключая отсюда $\varphi + 2K'\pi$, получимъ по преобразованіи:

$$(k - K)(\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\, lm) = 0.$$

Послѣднему равенству можно удовлетворить, полагая $k - K = 0$, откуда $k = K$, что влечетъ за собою конечно и $k' = K'$; но по нашему допущенію k и K различны; а потому:

$$\varphi + 2k'\pi - 2k\pi\, lm = 0,$$

что представляетъ условіе существованія вещественнаго логариѳма, и доставляетъ только тѣ системы значеній k и k', которыя соотвѣтствуютъ вещественному логариѳму, если послѣдній существуетъ.

И такъ всѣ логариѳмы $M + Ni$, получаемые изъ нашей формулы, различны для различныхъ системъ значеній k и k', исключая той системы, которой соотвѣтствуютъ вещественные логариѳмы, возможные только въ очень рѣдкихъ случаяхъ.

С. Петербургъ. *П. Рощинъ.*

2 Марта 1861 года.

II.

Обзоръ новѣйшихъ успѣховъ въ познаніи физическаго устройства солнца.

(продолженіе, См. N. 8).

2. Безпрерывныя измѣненія, происходящія на видимой поверхности солнца, состоящія въ явленіи пятенъ, факеловъ и свѣточей, безъ сомнѣнія заслуживаютъ гораздо большаго вниманія со стороны Астрономовъ и Физиковъ, чѣмъ то какое было посвящено имъ доселѣ. Случайныя и кратковременныя наблюденія этихъ явленій рѣдко въ состояніи прибавить что либо существенное къ разъясненію оныхъ; число же постоянныхъ наблюдателей, посвятившихъ себя изслѣдованію этого предмета, до сихъ поръ было слишкомъ ограниченно. Равнымъ образомъ и недостаточность употребленныхъ способовъ для наблюденія, въ виду многосложности и измѣнчивости явленій, имѣющихъ характеръ чисто метеорологическій, весьма ясно выказывается въ каждомъ усиліи отъискать въ оныхъ взаимную причинную зависимость. Уже Гумбольтъ во 2-мъ отдѣлѣ III-го тома *Космоса* (стр. 346) весьма справедливо замѣтилъ, что значеніе и связь столь перемѣнчивыхъ явленій тогда только представятся испытующему физику въ ихъ полномъ значеніи, когда будутъ въ состояніи получать непрерывный рядъ фотографическихъ изображеній солнечныхъ пятенъ и факе-

ловъ при помощи механическаго часоваго устройства и при многомѣсячной ясности тропическаго неба. Въ ожиданіи, что въ скоромъ времени раціональное примѣненіе фотогˊеліографіи (къ чему уже въ 1859 году были сдѣланы приготовленія на Обсерваторіи въ *Кью*, вблизи Лондона, подъ руководствомъ Де-ла-рю) доставить болѣе богатый матеріалъ для разъясненія явленій, которыя насъ занимаютъ здѣсь, мы должны ограничиться теперь тѣмъ, что собрано въ послѣднее время трудами *Вольфа, Швабе, Карингтона, Секки, Шакорнака, Давесъ, Горнштейна. Карля, Ноель, Шмидта* и другихъ

Однимъ изъ положительныхъ результатовъ, извлеченныхъ изъ новѣйшихъ и древнихъ наблюденій солнечныхъ пятенъ и обнимающихъ два съ половиною столѣтія, надобно почитать точнѣйшее опредѣленіе періода возвращенія ихъ maxima и minima. Изъ многочисленныхъ извѣстій, относящихся къ этому предмету и разсѣяннымъ въ различныхъ періодическихъ изданіяхъ, я приведу здѣсь только послѣднюю общую таблицу Проф. Вольфа, представляющую всѣ наблюдаемыя доселѣ

эпохи наименьшаго обилія солнечныхъ пятенъ:

	промежутки.
1610,8	8,2 года
1619,0	15,0
1634,0	11,0
1645,0	10,0
1655,0	11,0
1666,0	13,5 года
1679,5	10,0
1689,5	8,5
1698,0	14,0
1712,0	11,0
1723,0	10,5
1733,5	11,5
1745,0	10,5
1755,5	10,0
1765,5	10,3
1775,8	8,7
1784,5	14,5
1799,0	11,5
1810,5	12,7
1823,2	10,4
1833,6	10,4
1844,0	12,2
1856,2	

Подробное изложеніе результатовъ изслѣдованій Проф. Вольфа помѣщается въ издаваемомъ имъ Vierteljahrschrift der Naturforschenden Geselschaft in Zürich, а извлеченія изъ оныхъ публикуются въ Astronomische Nachrichten и Comptes rendus.

Установленный Профессоромъ Вольфомъ періодъ солнечныхъ пятенъ въ его средней продолжительности содержитъ 11, 119 года и это число гораздо лучше согласуется съ наблюденіями, чѣмъ періодъ Швабе въ 10,3 года. Во всякомъ случаѣ несомнѣнно, что періодъ этотъ подверженъ значительнымъ колебаніямъ, болѣе подробное изученіе которыхъ потребуетъ еще весьма значительнаго времени. Предъидущая таблица открываетъ замѣчательно короткій періодъ въ $8\frac{1}{2}$ лѣтъ, который повторяется почти чрезъ равныя промежутки времени; такимъ образомъ мы находимъ здѣсь періодъ въ періодѣ подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто въ свѣтовыхъ измѣненіяхъ неподвижныхъ звѣздъ. Эмпирическая формула, выведенная Проф. Вольфомъ, для представленія эпохъ minimum, наиболѣе удовлетворяющая наблюденіямъ, отъ 1610 до 1856, такова:

$$Ex = 1732,823 + x.\,11,119 + 1,621.\,\sin\left(146^0 + x.\,\frac{360^0}{15}\right) + 1,405\,\sin\left(230^0 + x.\,\frac{360^0}{5}\right)$$

Сравнивая результаты отклоненій, представляемыхъ этою формулою, при исключеніи въ оной двухъ періодическихъ членовъ, съ относительными числами, выражающими обиліе солнечныхъ пятенъ какъ для эпохъ maximum, такъ и minimum, Проф. Вольфъ приходитъ къ тому замѣчательному заключенію, что сильнѣйшая дѣятельность на поверхности солнца обусловливаетъ болѣе краткіе періоды, и обратно.— Къ этому характеристическому признаку, для эпохъ maximum и minimum, мы присоединимъ здѣсь результатъ наблюденія Г. Карингтона (Monthly Notices Vol. XIX N. I) относительно распредѣленія пятенъ. Въ два года, предшествовавшія эпохѣ minimum 1856 года, поясъ солнечныхъ пятенъ не распространялся за 20° сѣверной и южной гˊеліоцентрической широты, тогда какъ, начиная съ 1857 года, съ возрастаніемъ обилія пятенъ, они раздѣлились на два пояса по ту и другую сторону отъ экватора въ границахъ отъ 20° до 40° широты. Подобное наблюденіе было сдѣлано уже и прежде, а именно Докторомъ *Петерсъ* въ Неаполѣ во время наблюденій отъ Сентября 1845 до Октября 1846 г., слѣдовательно также въ эпоху непосредственно слѣдующую за minimum (1844 года). Сѣверный поясъ пятенъ распространялся тогда до 40°, а южный до 30°; промежуточная же, почти совершенно свободная отъ пятенъ полоса — отъ 8° сѣверной до 5° южной широты. Болѣе сильная дѣятельность обнаруживалась тогда въ сѣверной половинѣ, теперь же она принадлежитъ южному полушарію.

Что касается общаго распредѣленія солнечныхъ факеловъ, то по наблюденіямъ Секки (Astronomische. Nachr. Bd. 52) они обыкновенно соединены въ группахъ, которые составляютъ полосы по обѣ стороны экватора, подобные поясамъ пятенъ, но распространяющіяся далѣе къ полюсамъ. Тѣсная связь, существующая между образованіемъ пятенъ и факеловъ, все еще остается невполнѣ разъясненною. Главный недостатокъ въ этомъ отношеніи заключается въ невозможности опредѣленія теперешними средствами относительной, средней высоты факеловъ надъ темнымъ ядромъ пятенъ. Во всякомъ случаѣ однако кажется вѣроятнымъ, что факелы поддерживаются въ нѣкоторой хотя и незначительной высотѣ *надъ* фотосферою, въ подтвержденіе чего можно привести наблюденіе *Давесъ* (Astronom. Nachr. Bd. 52) 22 Октября 1859 г., когда широкая непрерывная полоса факеловъ, образующихъ какъ бы волнистую койму, выдвинулась за юго-западный край солнца отъ 2 до 3 секундъ, подобно ряду лунныхъ горъ. Наблюдатель замѣчаетъ при этомъ, что выдающаяся гряда факеловъ была темнѣе солнечнаго края, но замѣтно свѣтлѣе тѣни пятенъ.

Равнымъ образомъ, наблюденія *Шакорнака* и *Секки* (Comptes rendus T. XLVI и XLVII) надъ отдѣленіемъ отъ факеловъ, постоянно окружающихъ пятна, малыхъ свѣтовыхъ жилокъ, *свѣточей*, и какъ бы образованіе ими потоковъ стекающихъ внутрь пятна и мало по малу выполняющихъ отверстіе фотосферы, привели обоихъ наблюдателей къ необходимости принятія

превышающаго фотосферу слоя облачной матеріи, которая въ ея наибольшихъ сгущеніяхъ и дастъ начало факеламъ. Шакорнакъ склоненъ даже принимать нѣсколько такихъ слоевъ, которые представляются иногда раздѣльно (12—17 Марта 1858 г.), соединяясь только какъ бы свѣтовыми потоками. Съ этимъ согласуются и наблюденія Ноеля (Bulletins de l' Académie Royale de Bruxelles T. V) надъ кажущимся поднятіемъ (вспучиваніемъ) фотосферы, за которымъ слѣдуетъ обыкновенно разрывъ, открывающій пятно, и сгущеніе свѣтящейся матеріи на краяхъ онаго. При закрытіи пятенъ эта сгущенная, какъ бы тягучая свѣтовая матерія медленно расплывается на обѣ стороны и мало по малу приходитъ въ общій уровень фотосферы. При всемъ томъ, изъ предъидущихъ наблюденій нельзя сдѣлать положительнаго заключенія объ относительной высотѣ слоя факеловъ надъ внѣшнею границею фотосферы, и мнѣніе поддерживаемое *Феличемъ*, *Плантамуромъ* и др., что явленіе факеловъ обусловливается только внѣшними неровностями той же самой фотосферы, представляется не менѣе вѣроятнымъ. Мы должны слѣдоват. искать въ разборѣ другихъ явленій новыхъ основаній въ подкрѣпленіе того или другого мнѣнія.

Что касается самыхъ пятенъ, то многочисленныя наблюденія относительно ихъ образованія, вида и перемѣщенія подтверждаютъ вообще теорію предложенную *Вильсономъ* и окончательно установленную *Вилліамомъ Гершелемъ*. Несмотря на нѣкоторыя возраженія, представляемыя и въ новѣйшее время противъ физической возможности образованія столь обширныхъ разрывовъ въ облачномъ слоѣ и одѣвающей оный фотосферѣ, тотъ фактъ, что темное ядро пятенъ всегда лежитъ глубже, *подъ* этимъ слоемъ, не можетъ быть нынѣ оспариваемъ. Непосредственныя измѣренія, произведенныя Секки въ 1858 г. (Sulle macchie solari e del modo di determinare la profondità въ Atti della Accademia de' Nuovi Lincei VI. 2 Maggio) надъ однимъ круглымъ пятномъ съ концентрическою полутѣнью когда оно приблизилось къ солнечному краю, и когда полутѣнь со стороны обращенной къ срединѣ солнеч. диска совершенно исчезла, опредѣляютъ высоту внѣшняго предѣла фотосферы надъ поверхностію темнаго солнечнаго ядра равною только 0,37 земнаго радіуса. При помощи подобнаго же наблюденія, уже Вильсонъ пришелъ къ заключенію, что толстота видимыхъ покрововъ солнечнаго тѣла не превосходитъ земнаго полупоперечника; незначительность высоты фотосферы слѣдуетъ уже и изъ того обстоятельства что въ бо́льшей части пятенъ внутренняя тѣнь или ядро остаются видимыми и вблизи солнечнаго края. Это послѣднее обстоятельство, въ связи съ отчетливостію въ очертаніяхъ солнечныхъ пятенъ даже и вблизи края, а равно и нерѣдко наблюдаемое растяженіе полутѣни съ той стороны, съ которой по теоріи должно бы происходить съуживаніе, служатъ опорою для противниковъ принятія воронкообразныхъ разрывовъ фотосферы и существованія газообразной, преломляющей свѣтъ атмосферы солнца, окружающей фотосферу. Что касается абнормальнаго явленія полутѣни; то оно находитъ объясненіе въ новѣйшихъ наблюденіяхъ Горнштейна (Astronom. Nachr. Bd. 54), по которымъ дѣлается вѣроятнымъ, что направленія воронкообразныхъ отверстій фотосферы нерѣдко составляютъ весьма значительный уголъ съ нормаломъ къ поверхности; отчетливость же очертаній пятенъ вблизи края совсѣмъ не такъ значительна, какъ утверждаютъ противники солнечной атмосферы, и принятіе послѣдней скорѣе способствуетъ объясненію видимости внутренняго ядра пятенъ вблизи солнечнаго края.—Одно изъ болѣе серьёзныхъ, повидимому, возраженій представленныхъ противъ принятія атмосферы,—поглощающей часть солнечныхъ лучей, образующей вѣнецъ (корону) во время полныхъ солнечныхъ затмѣній, поддерживающей облачныя массы, извѣстныя подъ названіемъ красныхъ выступовъ (protuberances) и наконецъ, въ ея крайнихъ предѣлахъ, можетъ быть сокращающей путь кометъ краткаго періода обращенія, принадлежитъ астроному Фэ. (Sur l' atmospère du soleil, въ Comptes rendus T. XLIX N. 20). Онъ находитъ, что гипотетическіе законы лучеиспусканія свѣта фотосферою и поглощенія лучей въ солнечной атмосферѣ, допущенные знаменитымъ авторомъ Небесной механики à priori, не удовлетворяютъ наблюденіямъ — относительно степени ослабленія свѣта отъ средины солнечнаго диска къ его краямъ. Законъ лучеиспусканія, принимающій кажущееся напряженіе свѣта, возрастающимъ отъ средины къ краямъ солнечнаго диска пропорціонально секансу угловаго отстоянія и приложимый только къ случаю газообразной прозрачной средины въ раскаленномъ состояніи (подобно пламени газа), можетъ быть замѣненъ, по мнѣнію Фэ, другимъ, опирающимся на опытахъ Провотэ и Дезена, относительно лучеиспусканія теплоты, который лучше согласуется съ наблюденіями, а именно, что напряженіе свѣта остается повидимому одинаковымъ какъ въ центрѣ такъ и на краяхъ солнца, т. е. что лучеиспускательная способность пропорціональна косинусу тогоже угловаго отстоянія. Въ самомъ дѣлѣ, съ этою гипотезою, но сохраняя законъ Лапласа для поглощенія свѣта въ атмосферѣ, Г. Фэ достигаетъ того, что отклоненіе между результатомъ наблюденія (Секки) и вычисленія, при углѣ въ 68°, уменьшается на половину. Но такъ какъ разность остается здѣсь все еще весьма значительною, то Г. *Фэ* прямо заключаетъ, что гипотеза солнечной атмосферы должна быть совершенно отброшена, ибо, измѣняя приличнымъ образомъ законъ лучеиспусканія, можно удовлетворить наблюденіямъ и безъ помощи оной.—Заключеніе, какъ намъ кажется, во всякомъ случаѣ слишкомъ поспѣшное и произвольное. Но въ подкрѣпленіе онаго авторъ приводитъ и отчетливость очертаній солнечныхъ пятенъ вблизи солнечнаго края и тождество Фраунгоферовыхъ линій солнечнаго спектра, получаемаго отъ лучей центральныхъ и отъ краевъ солнца, какъ доказалъ оныхъ *Форбеса*, произведенный во время кольцеобразнаго затмѣнія 1836 года. Послѣднее наблюденіе впрочемъ еще нуждается въ подтвержденіи (*). Надобно сказать притомъ, что противникамъ принятія солнечной атмосферы, между которыми первое мѣсто занимаетъ Проф. *Феличъ*, не важно собственно ея существованіе или несуще-

(*) См. письмо Проф. Медлера въ этомъ же N.

ствованіе, но то обстоятельство, что присутствіе ея сильно ослабляетъ доказательства, приводимыя ими въ пользу *оптической* теоріи явленій, представляющихся при полныхъ солнечныхъ затмѣніяхъ, какъ мы увидимъ ниже. Здѣсь же мы можемъ противопоставить разсужденіямъ Г. *Фэ* основательныя изслѣдованія *Карингтона*, содержащіяся въ его статьѣ подъ заглавіемъ *On the Evidence which the Observed Motions of the Solar Spots offer for the Existence of on Atmosphere surrounding the Sun.* (въ Monthly Notices of the Royal astron. society for April 1858, а такъ же Philosophical Mag XV). Авторъ ищетъ подтвержденія существованія солнечной атмосферы въ непосредственныхъ наблюденіяхъ солнечныхъ пятенъ. Послѣднія конечно только тогда могутъ обнаружить ея присутствіе, если лучи достигающіе къ намъ отъ краевъ солнечной фотосферы испытываютъ, при выходѣ изъ атмосферы, замѣтное преломленіе. При совершенномъ незнаніи нашемъ закона измѣненія плотности въ этой атмосферѣ и самой высоты оной, оставалось прибѣгнуть къ болѣе или менѣе вѣроятнымъ предположеніямъ. Опредѣляя измѣненіе угловаго разстоянія при центрѣ сонца, какое долженъ испытывать каждый видимый съ земли пунктъ фотосферы, близкій къ краю солнца, въ предположеніи высоты атмосферы (однородной) равной $1/4$ солнечнаго радіуса и для 3-хъ различныхъ показателей преломленія а именно 1,0025, 1,0050 и 1,0100, авторъ сравниваетъ результаты вычисленія съ наблюденіемъ одного малаго рѣзко очерченнаго круглаго солнечнаго пятна, проходившаго весьма близко центра ☉ диска, и которое онъ преслѣдовалъ при двухъ появленіяхъ въ Августѣ и въ Сентябрѣ 1854 года, при весьма благопріятныхъ обстоятельствахъ. Сравнивая наблюдаемыя геліографическія долготы пятна съ вычисленными и принимая время сидерич. обращенія солнца $= 25^d. 240$, какъ наиболѣе согласующееся съ наблюденіями, авторъ, при помощи методы наименьшихъ квадратовъ, находитъ вѣроятнѣйше значеніе для показателя преломл. $= 1,002$,—результатъ весьма благопріятный гипотезѣ солнечной атмосферы.

Еще выгоднѣе для такихъ изслѣдованій было бы сравненіе 2-хъ такихъ пятенъ, которыя находятся почти въ одной параллели при довольно значительной разности въ долготѣ; но случай такого явленія не представился въ наблюденіяхъ Г. Карингтона при достаточно благопріятныхъ условіяхъ; а потому чтобъ подкрѣпить свой выводъ, онъ изслѣдовалъ еще наблюденія другаго пятна, также при двухъ появленіяхъ онаго, въ Іюлѣ и въ Августѣ 1854 г. Результатъ для вѣроятнѣйшей величины показателя преломленія, выведенный изъ втораго появленія этого пятна, при которомъ оно представлялось весьма малымъ, рѣзко очерченнымъ и безъ малѣйшаго слѣда полутѣни, совершенно одинаковъ съ вышеприведеннымъ; для перваго же появленія, при которомъ форма пятна представляла не столь благопріятныя условія для точности наблюденій, получается результатъ значительно большій. Какъ бы то ни-было эти наблюденія въ первый разъ представили непосредственное подтвержденіе гипотезы солнечной атмосферы, распространяющейся по меньшей мѣрѣ на $1/4$ солнечнаго радіуса, и, при очевидно невыгодномъ предположеніи равномѣрной плотности оной, дали вѣроятную величину послѣдней отъ 8 до 10 разъ большую плотности земнаго воздуха.—Выводы Г. Карингтона имѣли бы еще гораздо болѣе вѣса, если бы они не подлежали нѣкоторымъ возраженіямъ, на которыя уже указалъ самъ авторъ, а именно въ слѣдствіе непринятія въ расчетъ дѣйствія перспективы на измѣненіе положенія *видимаго* центра ядра пятенъ, какое должно допустить согласно гипотезѣ Вильсона и Гершеля о составѣ солнечныхъ покрововъ, и вліянія глубины самыхъ пятенъ подъ солнечною фомосферою. Значеніе этихъ возраженій ослабляется однако въ значительной степени во первыхъ формою избранныхъ для наблюденія пятенъ, и въ особенности послѣдняго при его вторичномъ появленіи, когда оно не представляло и слѣдовъ фотосферы, а также и тѣмъ обстоятельствомъ, что при разбираемыхъ здѣсь изслѣдованіяхъ были исключены наблюденія, близкія къ краю солнца. Поэтому главное сомнѣніе въ точности подобныхъ выводовъ, по справедливому замѣчанію автора, всегда будетъ имѣть основаніе въ измѣнчивой природѣ самыхъ пятенъ, и можетъ быть уменьшено только въ среднихъ выводахъ изъ значительнаго числа наблюденій.

Я остановился долѣе на результатахъ Г-на Карингтона какъ по самому значенію, какое я придаю имъ, такъ и съ цѣлію, яснѣе выказать, какую огромную услугу въ изслѣдованіяхъ подобнаго рода можетъ оказать фотогеліографія. Здѣсь я долженъ упомянуть еще о нѣкоторыхъ особенныхъ и необъяснимыхъ явленіяхъ въ образованіи, измѣненіи вида и мѣста солнечныхъ пятенъ, характеризующихъ сущность еще неизвѣстныхъ намъ дѣйствующихъ здѣсь силъ. Наблюденія Карля (Astronomische Nachr. Bd. 52) 1859 г., подтвердили уже прежде сдѣланное имъ замѣчаніе о сравнительномъ обиліи образованія новыхъ и исчезанія старыхъ пятенъ на противоположной, отвращенной отъ земли, половинѣ солнечной поверхности. Наблюденія 1859 г. даютъ отношенія для новообразовавшихся пятенъ, для земной и противуположной ей стороны солнца, какъ 1 : 12, а для исчезнувшихъ 1 : 20. — Фактъ весьма замѣчательный и стоющій дальнѣйшаго изслѣдованія. Это наблюденіе можно было бы привести въ связь съ претендуемымъ вліяніемъ планетъ на образованіе пятенъ (*Schmidt*, Resultate aus eilfjährigen Beobachtungen der Sonnenflecken, Wien 1857 и *Wolf*, Astronomische Nachrichten Bd. 49), еслибы вліяніе это можно было оправдать какой либо вѣроятной гипотезой. Нельзя пропустить также безъ упоминанія — замѣчанія того же Профессора Вольфа, что зимнее полугодіе, на которое падаетъ пиригелій, обильнѣе пятнами и что вблизи равноденствій обнаруживаются 2 maxima, а вблизи солнцестояній 2 minima (а именно: 5 Января и 6 Іюля, и 7 Октября и 3 Апрѣля). Наблюденія Секки показали, что существуютъ нѣкоторыя постоянныя мѣста, въ которыхъ, по преимуществу, образуются патна. Видъ пятенъ, наблюдаемый Давесъ, Секки, Карингтономъ, Горнштейномъ Шакорнакомъ и др. обнаруживаетъ вращательное движеніе оныхъ, а опредѣленіе геліографическаго положенія оныхъ и наблюдаемое распространеніе уже *образовавшихся* пятенъ доказали и поступательное движеніе, которое мы должны относить

къ перемѣщенію сферы или направленія дѣйствія возмущающей причины, производящей явленія пятенъ.

Оканчивая обзоръ этой группы явленій, я считаю не неумѣстнымъ, на основаніи всего предъидущаго, высказать здѣсь какое представленіе кажется мнѣ наиболѣе естественнымъ о взаимномъ отношеніи вообще принимаемыхъ доселѣ 3-хъ *различныхъ* солнечныхъ покрововъ, и объясняющимъ разобранныя нами доселѣ явленія покрайней мѣрѣ въ общихъ чертахъ. Убѣждаясь въ существованіи самаго внѣшняго слоя, *атмосферы*, окружающей фотосферу, конечно нельзя себѣ представить, чтобъ эта, безъ сомнѣнія газообразная средина не выполняла покрайней мѣрѣ воронкообразныхъ отверстій, дающихъ начало явленію солнечныхъ пятенъ. По всей вѣроятности она достигаетъ здѣсь поверхности твердаго или жидкаго ядра солнечнаго тѣла и необходимо должна имѣть въ прикосновеніи съ оною наибольшую плотность. Такимъ образомъ открывается возможность представлять себѣ солнечную атмосферу непосредственно прилегающею *повсюду* къ самой поверхности солнца, подобно атмосферѣ земной; съ тѣмъ вмѣстѣ мы избавимся необходимости принимать первый нижній, *облачный* покровъ какъ чтото отдѣльное и независимое отъ солнечнаго ядра. Я полагаю что несравненно правдоподобнѣе думать, что это есть болѣе или менѣе непрерывный слой облаковъ, поддерживаемыхъ самою атмосферою на извѣстной, вѣротно весьма малой высотѣ, зависящей отъ относительной ихъ плотности. Высшимъ предѣломъ этого слоя есть Фотосфера, которую я никакъ не могу себѣ представить *отдѣльнымъ* матеріальнымъ покровомъ, какъ бы пропитаннымъ свѣтомъ, и думаю, что наблюденія ясно указываютъ, что это есть только свѣтовой *процессъ*, совершающійся въ тѣсныхъ предѣлахъ на внѣшней границѣ облачнаго или пароваго слоя, и необходимо прекращающійся тамъ, гдѣ происходитъ разрывъ облаковъ, въ слѣдствіе восходящихъ потоковъ газа атмосферы. Эти потоки существуютъ повсюду и придаютъ фотосферѣ видъ испещренный, порообразный, а при наибольшемъ развитіи оныхъ, принимаютъ характеръ вихрей, обнимающихъ огромныя пространства. Если свѣтъ солнечной фотосферы, какъ обыкновенно принимаютъ, и какъ мы разсмотримъ это ниже, есть явленіе электрическое; то стоитъ только предположить, что непрерывный, болѣе тяжелый облачный слой заряженъ постоянно электричествомъ положительнымъ, или отрицательнымъ, высшіе же слои атмосферы, (вѣроятно также пропитанныя парами, но еще по большей части не сгустившимися и не склубившимися въ облака) — электричествомъ противоположнаго рода; то необходимымъ слѣдствіемъ гипотозы будетъ непрерывное соединеніе разнородныхъ электричествъ,—обнаруживающееся свѣтовымъ процесомъ преимущественно на внѣшней поверхности облачнаго слоя; гдѣ напряженіе электричества достигаетъ своего maximum. Такимъ образомъ много разъ высказанное мнѣніе, что солнечный свѣтъ есть ни что иное какъ непрерывное и повсюду распространенное *сѣверное сіяніе*, (удовлотворительное объясненіе котораго далъ въ недавное время *Де ла ривъ*) имѣетъ, по моему убѣжденію, дѣйстительное значеніе. (*) Нижній облачный слой можетъ имѣть постояннымъ источникомъ своего электричества самое тѣло солнца, если не непосредственно, то чрезъ вліяніе, восходящіе же бурные атмосферные потоки, разливающіеся въ высшихъ слояхъ атмосферы приносятъ съ собою безпрерывно новый запасъ электричества противоположнаго тому, какимъ заряженъ верхній предѣлъ облачнаго слоя. Въ слѣдствіе такого взгляда объясненіе явленій наблюдаемыхъ на внѣшней поверхности солнца значительно упрощается, и при томъ пріобрѣтаетъ характеръ физической естественности. Мы увидимъ ниже, при разборѣ остальныхъ группъ явленій, на сколько эти послѣднія соотвѣтствуютъ нашему взгляду; здѣсь же ограничимся еще нѣсколькими замѣчаніями, непосредственно относящимися къ наблюденіямъ солнечныхъ пятенъ и факеловъ. Выводимая изъ наблюденій пятенъ вблизи солнечнаго края высота слоя Фотосферы надъ поверхностію темнаго солнечнаго тѣла, въ слѣдствіе принятія непрерывной солнечной атмосферы, имѣющей наибольшую плотность въ ея нижнихъ слояхъ, по всей вѣроятности должна быть менѣе дѣйствительной. Непринятіе Г-мъ Корингтономъ въ расчетъ толстоты облочнаго слоя должно было невыгоднымъ образомъ уменьшить численную величину его результата. Появленіе факеловъ въ окружности солнечныхъ пятенъ объясняется естественнымъ накопленіемъ здѣсь паровъ съ противоположнымъ электричествомъ облачному слою, самыя же факелы могутъ быть ничто иное какъ легкія облака, подобныя нашимъ cirrus, плавающія въ верхнихъ слояхъ отмосферы, съ пониженіемъ которыхъ наступаетъ размѣнъ электричества, на ихъ нижней поверхности. Если эти легкія облака не совершенно прозрачны, то вблизи средины солнечнаго диска, причиняемое дѣятельностію оныхъ увеличеніе свѣта можетъ компенсироваться и такимъ образомъ Факелы исчезаютъ изъ виду; напротивъ того, вблизи края солнца мы видимъ ихъ такъ сказать въ профиль и явленіе свѣта на сторонѣ обращенной къ центру солнца для насъ доступно. Наконецъ мгновенное развитіе свѣта внутри самыхъ солнечныхъ пятенъ, какъ бы вспыхиваніе, наблюдаемое Г. Карингтономъ и Годисаномъ въ Октябрѣ 1859 г. (Poggendorf's Annalen Bd. CIX p. 190) должно быть объяснено случайнымъ электрическимъ разряженіемъ, происходящимъ внутри воронкообразнаго отверстія, между стѣнками облачнаго слоя и наэлектризованнымъ противоположно восходящимъ потокомъ.

(*) Сколько можно судить по сообщенію Фэ (Comptes rendus T. XLVIII N. 6) относительно содержанія мемуара *Женилле*, послѣдній высказываетъ подобное же представленіе, называя состояніе, которому мы обязаны свѣченіемъ солнцъ, непрерывною грозою.

(продолженіе впредь.)

Библіографическій указатель.

14. Die Fortschritte der Physik im Jahre 1858. XIV Jahrgang. Berlin 1860, въ двухъ частяхъ.

Это изданіе, составляющее заслугу Берлинскаго Физическаго Общества и уже давно сдѣлавшееся необходимою настольною книгою для всѣхъ слѣдящихъ за развитіемъ физическихъ наукъ, могло бы, по обилію и обработанности матеріала, совершенно устранить надобность библіографическихъ обзоровъ, помѣщаемыхъ въ различныхъ періодическихъ изданіяхъ, если бы только оно появлялось не столь поздо. Но это послѣднее условіе именно необходимо для полноты содержанія, обнимающаго физическую литературу всѣхъ образованныхъ странъ. Считаемъ не лишнимъ обратить здѣсь, разъ и на всегда, на эту систематическую библіографію физическихъ наукъ вниманіе тѣхъ изъ нашихъ читателей, которымъ еще не представился случай познакомиться съ упоминаемымъ изданіемъ. Само собою однако разумѣется, что различные отдѣлы этаго сборника обработаны неодинаково строго.

15. *D' Abbadie*, Geodesie de la Haute Ethiopie, verifiée et rédigée par Radau. Paris, 1861.

Это обширное сочиненіе появляющееся отдѣльными выпусками и представляющее подробное изложеніе результатовъ девятилѣтнихъ геодезическихъ трудовъ Г-на *Д' Аббади*, произведенныхъ собственными средствами въ странѣ еще недоступной цивилизаціи, заслужило самыя пламенныя похвалы его соотечественниковъ. Въ практическомъ отношеніи трудъ Г. Д' Аббади представляетъ тотъ интересъ для спеціалистовъ, что онъ знакомитъ съ употребленными имъ для достиженія цѣли, прекрасно выбранными средствами и методами наблюденій при тѣхъ трудныхъ условіяхъ, въ которыя былъ поставленъ ученый путешественникъ физическими и соціальными условіями страны.

16. Publications de l' Observatoire d' Athénes T. I, série 2-me. содерж. Beiträge zur physikalischen Geographie von Griechenland von *Julius Schmidt*, Athen, 1861.

Этимъ томомъ начато изданіе трудовъ, въ которыхъ принимаетъ участіе Афинская Обсерваторія, приводимая нынѣ ея просвѣщеннымъ протекторомъ Барономъ *Сина* въ положеніе соотвѣтствующее настоящему состоянію науки. Первый отдѣлъ будетъ заключать астрономическую часть.

17. Lehrbuch der Geodäsie für Feldmesser, Militärs und Architekten von *Jacob Heussi*, Leipzig 1861.

Книга эта можетъ быть рекомендована, какъ практическое руководство для занимающихся низшей Геодезіей. До сихъ поръ появилась только первая часть.

III.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professor G. Mädler.

(Dorpat d. 4 April 1861).

Ein Vorschlag.

Die jüngste totale Sonnenfinsterniss, die eine grössere Zahl von Beobachtern als jemals eine frühere, innerhalb ihres Bereichs vereinigte, hat auch einige dieser Frequenz entsprechende und zum Theil durchaus neue Thatsachen ans Licht gebracht. Zu den letztern ist namentlich eine von Herrn Barreda aus Madrid gemachte Wahrnehmung zu zählen. Er bemerkte, dass bereits 20 Minuten nach dem Anfange der Finsterniss, also zu einer Zeit, wo die Phase noch nicht $1/3$ erreicht hatte, im prismatischen Spectrum zuerst ein Vermischen des Gelb und Orange, bald darauf auch eine des Blau und Indigo, dann ein allmähliches Verschwinden des Violet u. s. w. bis kurz vor dem Beginn der Totalität vom gesammten Farbenspectrum nur noch eine Spur des Roth wahrnehmbar blieb, während nach dem Ende der totalen Finsterniss das Ganze in umgekehrter Ordnung sich wiederholte. Es kann nicht die Rede davon sein eine zum erstenmal gemachte Beobachtung dieser Gattung (*) jetzt schon erklären zu wollen. Sie muss noch oft und möglichst mannigfaltig varriirt werden, bevor wir einen Deutungsversuch wagen können. Totale Sonnenfinsternisse, die eine der Cultur erschlossene oder doch zugängliche Gegend treffen, sind zu seltene Ereignisse, um eine oftmalige Wiederholung, ausser im Verlauf von Jahrhunderten, zu gestatten. Nun aber ist es nicht erforderlich auf solche sich zu beschränken. Wenn nach Barreda's Wahrnehmung schon 20 — 25 Minuten nach dem Beginn die Variationen im Spectrum sich zeigen, so kann überall, wo die Finsterniss 4—5 Zoll erreicht oder übersteigt, das Experiment wiederholt werden. Man wird zwar nicht Alles was Barreda wahrgenommen, beobachten können, für den Theil des Phänomens jedoch, der sich darstellt, *mehr* Zeit haben, als bei einer totalen Finsterniss, da bei einer partiällen die Zu- und Abnahme der Phase langsamer erfolgt und namentlich um das Maximum herum die Grösse der Finsterniss sich 10 – 15 Minuten lang fast auf gleicher Höhe erhält.

Namentlich wäre es wünschenswerth zu ermitteln, ob die dunkelen Linien im Spectrum an dieser Veränderung Theil nehmen und wie sie sich überhaupt dabei verhalten.

Die nächste für Europa sichtbare Finsterniss wird am $^{19}/_{31}$ Dec. d. J. stattfinden. Sie ist total auf einer Zone, die unsern Continent an der Senegalmündung

(*) Herr *Liais* berichtet über die Beobachtungen am 15 März 1858 in Cherburg (Comptes rendus XLVI, 657) folgendes: „Avec l' appareil pour l' étude des raies du spectre dirigé vers le ciel, j'ai remarqué un notable accroissement de la ligne *D*, une diminution d' intensité de l' orangé et spécialement une diminution de la partie violette du spectre au delà de la ligne *H*.“

(Anmerk. der Red.)

zuerst berührt, durch Afrika's Wüste und das Mittelmeer, an Corinth und Athen nahe vorüber zieht und in der Gegend von Brussa endet. Innerhalb der Grenzen Russlands ist sie fast nirgends sichtbar, wohl aber im südwestlichen Europa. Eine günstigere Gelegenheit aber wird die Finsterniss von 1867 am $\frac{22 \text{ Febr.}}{6 \text{ Marz}}$ darbieten, die auf einer Zone, welche die Städte Widdin und Kasan trifft, ringförmig erscheint. Nicht unwahrscheinlich wird das Sonnenspectrum für totale und ringförmige Sonnenfinsternisse sich in sehr verschiedener Weise modificiren.

Die gegenwärtige Mittheilung hat mehr den Physiker als den Astronomen im Auge, allein es besteht ja längst kein Zweifel mehr darüber, dass das wissenschaftliche Interesse an solchen Himmelsbegebenheiten kein ausschliesslich astronomisches, sondern mindestens eben so sehr ein physicalisches sei. Je mehr wir die Versäumnisse früherer Jahrhunderte in dieser Richtung zu beklagen haben, um desto dringender muss die Gegenwart sich aufgefordert fühlen, mit grösstem Eifer das Versäumte nachzuholen um der kommenden Generation keine Veranlassung zu ähnlichen Klagen zu bieten.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. Гогенъ представилъ записку Парижской Академіи наукъ (Comptes rendus, 18 Fevrier. 1861) о цилиндрическихъ конденсаторахъ. Результаты его изслѣдованій слѣдующіе: а) если два металлическіе цилиндра раздѣлены между собою непроводящимъ веществомъ напр. гуттаперчей, если внутренній соединенъ съ источникомъ электричества а внѣшній съ землею; то индукцированный зарядъ (charge influensée) (*) внѣшняго равенъ индукцирующему заряду внутренняго цилиндра. b) Наоборотъ если внѣшній цилиндръ въ сообщеніи съ источникомъ электричества, а внутренній съ землею; то, предполагая силу источника неизмѣнною, индукцированный зарядъ внутренняго цилиндра равенъ совершенно тому заряду, еслибы онъ сдѣлался индукцирующимъ. c) Когда внѣшній цилиндръ въ сообщеніи съ источникомъ, то его зарядъ можно разсматривать какъ сумму, состоящую изъ двухъ частей: одной, равной индукцированному заряду внутренняго цилиндра, другой, представляющей количество электричества, какое бы получилъ цилиндръ, подверженный одному только вліянію окружающей средины, въ которой производится опытъ.

Если конденсаторъ составленъ изъ трехъ концентрическихъ цилиндровъ, если средній сообщенъ съ источникомъ а два другіе съ землею; то зарядъ средняго всегда равенъ суммѣ зарядовъ внѣшняго и внутренняго цилиндровъ. По этому конденсаторъ, устроенный спирально, можетъ служить къ большому накопленію электричества, при маломъ объемѣ.

d) Наконецъ, если назвать *сопротивленіемъ индукціи* (résistance à l'influence) количество, обратно пропорціональное заряду, получаемому однимъ изъ двухъ цилиндровъ конденсатора, когда внутренній удерживается при напряженіи электричества равномъ 1, а внѣшній при напряженіи = 0; то это сопротивленіе ϱ можетъ быть выражено

$$\varrho = k \log \frac{R}{r}$$

гдѣ R и r радіусы цилиндровъ, k постоянный множитель, зависящій отъ индуктивной способности изоляторовъ, (которые у Гогена были гуммилакъ, или воздухъ) и отъ длины цилиндровъ.

(*) Хотя обыкновенно influencé называютъ „возбужденнымъ чрезъ вліяніе" однако я употребилъ слово индукцированный, что все равно.

2. *О физическихъ особенностяхъ искры индукціоннаго прибора Румкорфа:* Опыты Перро́ (Annales de chimie et d. physique T. LXI p. 161) показали, что искра индукціоннаго прибора состоитъ изъ двухъ частей, имѣющихъ особенныя свойства, изъ которыхъ одна часть производитъ дѣйствія электричества статическаго, а другая динамическаго.

Первая часть есть внутренняя, болѣе яркая, а другая, болѣе туманная, окружающая первую, на подобіе атмосферы. Посредствомъ введенія постороннихъ тѣлъ въ искру, Перро́ удалось отдѣлить одну часть искры отъ другой; а посредствомъ развѣтвленія тока можно было получить свѣтлую искру и туманную даже въ отдѣльныхъ частяхъ проводниковъ. Тогда можно было изслѣдовать каждую изъ нихъ отдѣльно; причемъ оказалось, что свѣтлая искра имѣетъ совершенное сходство съ искрой электрической машины; она начиналась у обоихъ полюсовъ одинакимъ образомъ, разрывъ сопровождался обыкновеннымъ сухимъ трескомъ. Эта искра, казалось, не имѣетъ свойства увеличивать температуры погружаемыхъ въ нее тѣлъ: кусокъ бумаги пробивается ею, но нельзя отъискать въ немъ ни малѣйшихъ слѣдовъ сгаранія. Искра туманная имѣетъ свойства одинакія съ разряженіемъ электричества динамическаго; поэтому въ ней можно замѣтить неоднообразность у полюсовъ, подобно свѣтовой вольтовой дугѣ; платиновая проволока, или тонкая стеклянная нить, введенныя въ такую искру, раскаливаются. Далѣе, изслѣдованія Перро показали, что пары разлагаются отъ прохожденія искры въ продолженіе болѣе или менѣе короткаго промежутка времени; всякій разъ отъ разложенія водяныхъ паровъ получались кислородъ на положительномъ полюсѣ, а водородъ на отрицательномъ; разложеніе газа углекислоты дало смѣсь изъ окиси углерода и кислорода и т. п. Таже самая искра производитъ и соединеніе отдѣльныхъ газовъ; Перро́, пропуская искру чрезъ смѣсь азота и кислорода, получилъ азотную кислоту.

Совокупность всѣхъ опытовъ дала слѣдующіе результаты:

1) Водяные пары разлагаются отъ прохожденія искры индукціоннаго прибора Румкорфа.

2) Искра индукціоннаго прибора соединяетъ и разлагаетъ газы или пары скорѣе и въ большемъ количествѣ нежели искра электрической машины.

3) Введеніе конденсаторовъ, между которыми происходитъ искра, увеличиваетъ химическое дѣйствіе; но такъ какъ оно уменьшаетъ притомъ длину искры и число разряженій; то поэтому не всегда можно воспользоваться этимъ средствомъ въ надлежащей мѣрѣ.

4) Разложеніе паровъ происходитъ отъ электролитическаго дѣйствія одной части искры.

5) Количество сложеннаго или разложеннаго газа, или паровъ, увеличивается съ длиною искры, если напряженіе тоже самое.

6) Наконецъ, въ данномъ приборѣ всегда находится опредѣленная длина искры, дающая *maximum* химическаго дѣйствія.

Общее заключеніе таково, что теплотворныя и химическія дѣйствія индукціонной искры зависятъ единственно только отъ свѣтовой атмосферы, окружающей свѣтлую ея часть, которая, однакожъ способна приводить въ соединеніе механическую смѣсь, какъ напр. гремучій газъ. Въ искрѣ электрической машины нельзя было замѣтить, покрайней мѣрѣ до сихъ поръ, такихъ отдѣльныхъ частей; поэтому вѣроятно и химическое дѣйствіе ея слабѣе, нежели въ искрѣ индукціоннаго прибора.

К. Чеховичъ.

3. *Краткія извѣстія.*

— Проф. *Кноблаухъ*, въ запискѣ представленной Берлинской Академіи Наукъ уже въ Августѣ 1859 г., показалъ тождество въ явленіяхъ диффракціи для лучей теплородныхъ и свѣтовыхъ, а въ Сентябрѣ прошедшаго года сообщившій о своихъ новыхъ изслѣдованіяхъ надъ интерференціею теплородныхъ лучей и отраженіемъ оныхъ отъ кристалловъ Обществу нѣмецкихъ естествоиспытателей въ Кенигсбергѣ,— занятъ въ настоящее время редакціею мемуара объ этомъ предметѣ, который займетъ мѣсто въ ежегодно издаваемыхъ отчетахъ Общества (Изъ письма Проф. Кноблауха къ Издателю отъ 4 Марта 1861 г.)

— Г. *Рену* представилъ второй мемоаръ Парижской Академіи, въ которомъ старается доказать періодичность возвращенія суровыхъ зимъ, состоящую по его мнѣнію въ зависимости отъ періодичности въ появленіи солнечныхъ пятенъ. Хотя періодъ послѣдняго явленія самъ подверженъ значительнымъ измѣненіямъ и колеблется по вычисленіямъ Вольфа между 8 и 14 годами, но при всемъ томъ связь онаго съ періодическимъ явленіемъ въ возрастаніи и уменьшеніи среднихъ отклоненій горизонтальной магнитной стрелки не подлежитъ сомнѣнію. Г-нъ Рену хочетъ ввести теперь еще одно явленіе, какъ зависящее отъ той-же общей, неизвѣстной еще причины; но продолжительность метеорологическаго періода въ возвращеніи суровыхъ зимъ, или жаркихъ лѣтъ, полагаетъ равною четыремъ періодамъ солнечныхъ пятенъ, а именно 41 году. Хотя приводимыя имъ основанія такого утвержденія еще весьма недостаточны; но во всякомъ случаѣ замѣчаніе, котораго сущность основывается на легко возможной зависимости явленій, заслуживаетъ вниманія и дальнѣйшаго изслѣдованія.

— Г. *Секки* въ письмѣ къ Редактору „*Космоса*“, по поводу изданнаго имъ описанія и обзора послѣднихъ наблюденій Магнитной Обсерваторіи въ Collegio Romano, объясняетъ найденную имъ связь между метеорологическими и магнитными явленіями въ слѣдующихъ положеніяхъ: 1-е, Кромѣ такъ называемыхъ магнитныхъ возмущеній, существуютъ болѣе спокойныя волны, обнимающія отъ шести до девяти дней въ восходящей части кривой и отъ двухъ до трехъ дней въ нисходящей; 2-е, эти волны, представляемыя бифилярнымъ магнитометромъ всего очевиднѣе, и весьма часто непосредственно, соотвѣтствуютъ значительнымъ измѣненіямъ температуры, быстрому образованію облаковъ, въ особенности cirrus, и наконецъ измѣненію въ направленіи вѣтра. Общее заключеніе въ этомъ послѣднемъ отношеніи таково, что восходящее движеніе въ магнитной кривой обнаруживается преимущественно при вѣтрѣ сѣверномъ а нисходящее—при южномъ. Безъ сомнѣнія такая зависимость не можетъ быть непосредственною и, вѣроятно, при дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ, окажется подчиненною измѣненіямъ температуры.

— Открыты еще четыре новыя планеты, въ группѣ астероидовъ, а именно 64-я, получившая названіе *Анжелина*, 4-го Марта и 65-ая, *Максимиліана* 8-го Марта; обѣ въ Марсели Г-мъ *Темпель*. Планета 66-ая открыта 9-го Марта въ Кембриджѣ (въ Америкѣ) Г-мъ Тутль; и 67-ая *Лето* въ Билькѣ 29-го Апрѣля Г-мъ Лутеръ. А 4-го Апрѣля въ Ньюоркѣ открыта новая комета Г-мъ Течеръ.

Замѣченныя опечатки:

Въ № 3.

Стр. 26, въ двухъ послѣднихъ формулахъ выражающихъ: XP^{n-1} и YP^{n-1}

вмѣсто $\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2$ должно быть $\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-1}$.

Въ № 5 и 6.

Стр. 40, въ предпослѣдней строкѣ

напечатано $$\int_0^\infty e^{(vu-vx)\sqrt{-1}} f(u)\,du$$

должно быть $$\int_0^\infty e^{(vu-vx)\sqrt{-1}}\,dv$$

Стр. 44 въ 1-й строкѣ:

$$= n\int_0^\infty u\,\varphi(k^n)\,k^{n-1}\,dk \qquad = n\int_0^\infty U\,\varphi(k^n)\,k^{n-1}\,dk\,.$$

Печатать позволяется Вильно 1 Мая 1861 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А. Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*